

# 基于得分驱动混频动态因子模型的宏观经济景气指数测度

叶仕奇<sup>1,2</sup>, 郑挺国<sup>3</sup>

(1. 预测科学研究中心, 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190; 2. 数学科学全国重点实验室, 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190; 3. 厦门大学邹至庄经济研究院, 厦门 361000)

**摘要** 重大事件冲击带来宏观经济变量的大幅变动, 使得传统参数驱动的混频动态因子模型 (PD-MFDFM) 出现了模型参数稳定性显著降低的现象, 从而严重影响到提取得到的经济景气指数的稳定性, 进而可能影响经济形势研判以及宏观政策的制定. 为解决该问题, 本文提出了一类得分驱动的混频动态因子模型 (SD-MFDFM) 并给出了相应的极大似然估计方法, 且其分布可为正态或学生  $t$  分布. 特别地, 厚尾分布的引入可使模型通过数据驱动的方式判断宏观经济变量的异常波动是来自数据的厚尾噪音, 还是来自经济下行的信号, 该分布也可以用来处理模型参数的不稳定性, 得到稳健于极端事件的经济景气指数测度结果. 模拟研究表明, 极大似然估计在模型正确设定下表现良好, 而忽略宏观数据的厚尾特征会导致模型参数估计存在偏误, 进而出现因子估计的巨大偏差. 最后, 以中美经济数据为例, 本文将 SD-MFDFM 模型与传统方法的估计结果进行比较, 并扩展了该模型考虑了条件异方差性的情况, 结果再次证实了所提出模型的优势, 以及提取得到的宏观经济景气指数的稳定性与准确性.

**关键词** 得分驱动方法; 混频动态因子模型; 厚尾分布; 宏观经济景气指数

## Measurement of Business Cycle Coincident Index Based on Score-Driven Mixed-Frequency Dynamic Factor Model

YE Shiqi<sup>1,2</sup>, ZHENG Tingguo<sup>3</sup>

(1. AMSS Center for Forecasting Science, Academy of Mathematics and Systemic Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China; 2. State Key Laboratory of Mathematical Sciences, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China; 3. Gregory Chow Institute for Economic Studies, Xiamen University, Xiamen 361000, China)

收稿日期: 2024-11-11

基金项目: 国家社科基金重大项目 (23&ZD074)

Supported by Major Program of National Social Science Foun of China

**作者简介:** 叶仕奇 (1996-), 男, 汉, 福建厦门人, 助理研究员, 研究方向: 时间序列分析, 宏观计量, 金融计量, E-mail: shiqi.ye.c@gmail.com; 郑挺国 (通信作者) (1979-), 男, 汉, 浙江温岭人, 教授, 博士生导师, 研究方向: 宏观经济与政策, 宏观计量, 金融计量, 时间序列分析, E-mail: zhengtg@gmail.com.

**Abstract** Major event shocks cause significant fluctuations in macroeconomic variables, leading to a notable decrease in the parameter stability of traditional parameter-driven mixed-frequency dynamic factor models (PD-MFDFM). This severely impacts the stability of the extracted business cycle coincident index, potentially affecting economic situation analysis and macroeconomic policy formulation. To address this issue, this paper proposes a new class of score-driven mixed-frequency dynamic factor models (SD-MFDFM) and provides the corresponding maximum likelihood estimation method, where the distribution can be either normal or Student's  $t$ . Particularly, the introduction of heavy-tailed distributions allows the model to determine, in a data-driven manner, whether abnormal fluctuations in macroeconomic variables stem from heavy-tailed noise in the data or signals of economic downturn. This distribution can also handle the instability of model parameters, yielding robust measurements of the business cycle coincident index against extreme events. Simulation studies show that the maximum likelihood estimation performs well under correct model specification, while ignoring the heavy-tailed characteristics of macroeconomic data leads to biased parameter estimates and significant deviations in factor estimation. Finally, using economic data from China and the United States as examples, this paper compares the estimation results of the SD-MFDFM model with traditional methods and extends the model to consider conditional heteroskedasticity. The results reconfirm the advantages of the proposed model and the stability and accuracy of the extracted business cycle coincident index.

**Keywords** score-driven method; mixed-frequency dynamic factor model; heavy-tailed distribution; business cycle coincident index

## 1 引言

近年来, 新冠疫情、俄乌冲突等重大事件对多国经济造成了严重影响. 与此同时, 各国政府已经推出了数万亿的财政和货币举措来应对全球性事件对经济的冲击. 重大事件冲击的负向影响与积极的经济政策措施使得各种宏观经济指标发生剧烈波动, 且与过去的历史经济波动存在较大差异. 这些经济指标的剧烈波动也给经济监测和预测带来了计量经济学建模与解释两方面的重要挑战.

在计量经济学建模方面, 以混频动态因子模型 (mixed-frequency dynamic factor model, MF-DFM) 为代表的现有关于宏观经济监测的模型, 在重大全球性事件冲击, 尤其是新冠疫情 (COVID-19) 前后呈现出了明显的不稳定性, 从而为相关模型构建带来了重大挑战. 具体而言, 仅使用 COVID-19 暴发前的信息和使用包含暴发后时间点的信息集估计得到的混频动态因子模型, 其模型参数存在极大差别, 致使经济景气指数测度出现显著差异, 进而影响相关的经济学解释和分析. 一个代表性的例子是, 纽约联邦储备银行 2021 年 9 月在其网站公告表示: “COVID-19 的不确定性及由此产生的数据波动性给即时预测模型带来了诸多挑战. 因此, 我们决定暂停发布即时预测, 同时我们继续努力在方法论上进行改进, 以更好地应对这些挑战”<sup>1</sup>. 如何构建稳定的混频动态因子模型, 以充分克服重大事件冲击带来的模型不稳定性

<sup>1</sup>相关信息及讨论参见 <https://www.newyorkfed.org/research/policy/nowcast#/faq>.

题, 是当下宏观经济监测预测所需要克服的难点与痛点。

需要强调的是, 现有的混频动态因子模型往往假设模型中的随机扰动项服从正态分布 (郑挺国和王霞, 2013; 栾惠德和侯晓霞, 2015; 陈磊等, 2018; 尚玉皇和郑挺国, 2018; 陈磊等, 2019; 王霞和郑挺国, 2020; 周德才等, 2020; 尚玉皇和郑挺国, 2023; 郑挺国等, 2023; Aruoba et al., 2009; Scotti, 2016). 从计量经济学建模的角度上看, 通过高斯结构性冲击来解释经济衰退和危机期间的宏观经济下行存在一定的困难. 特别是, 在经济衰退和经济出现潜在危机的时期, 外生冲击对经济的影响可能会表现出过度的峰度, 其远比高斯分布假设中所能够刻画的峰度要高, 因此通常被称为“尾部风险” (Mishkin, 2011). 近年来, 一些国外研究采用了基于学生  $t$  分布的计量建模方法, 以研究宏观经济变动中存在的厚尾现象. 例如, Cúrdia et al. (2014) 和 Chib and Ramamurthy (2014) 发现, 与标准的高斯模型相比, 具有  $t$  分布结构冲击的模型在实际数据分析中具有更好的拟合效果和解释能力. Clark and Ravazzolo (2015)、Cross and Poon (2016) 以及 Chiu et al. (2017) 的相关研究表明, 同时考察厚尾现象 (利用学生  $t$  分布) 和时变波动率对于改进美国主要宏观经济变量的样本外预测效果具有显著帮助. 与此同时, Carriero et al. (2021) 使用稳健于异常值的 VAR-SV 模型以解释 COVID-19 的极端观测结果, 并验证该模型的预测效果与带有  $t$  分布的 VAR 模型存在可比性. Karlsson et al. (2023) 进一步提出了一类带有广义双曲偏态  $t$  (Generalized Hyperbolic Skew  $t$ ) 分布的 VAR-SV 模型, 验证并利用了月度宏观经济时间序列存在的显著厚尾特征. 与美国宏观经济数据类似, 中国的宏观经济数据在重大事件前后, 譬如国际金融危机、COVID-19 等亦存在明显的剧烈波动, 从而存在厚尾特征. 为此, 本文将厚尾分布引入混频动态因子模型中, 以充分刻画宏观经济变量存在的尾部特征, 从而吸收重大外生事件冲击对于模型稳定性的影响.

另一个重要的挑战是如何认识重大事件冲击带来的影响, 即回答国际金融危机、COVID-19 等重大事件的发生, 究竟是仅作为一个极端事件给宏观经济变量带来异常波动, 还是随之产生了一个显著的经济下行信号. 这个问题的解答需要模型能够充分考虑宏观经济变量的大幅变动来自于厚尾分布的可能性, 从而在吸收该可能性的基础上, 进一步考察 COVID-19 对于宏观经济运行情况的影响, 以清晰判断宏观经济形势, 评估相关宏观经济政策的效果. 传统混频动态因子模型因其无法充分刻画宏观经济变量的厚尾特征, 对于上述问题的回答往往存在片面性. 譬如, 尽管纽约联邦储备银行于 2023 年 8 月恢复了 GDP 即时预测模型, 即 Nowcast 2.0 模型, 通过对因子的更新引入滞后项, 并在因子更新式中引入时变波动率达到了相对稳健的模型估计结果, 但是该模型仍假设随机扰动项是正态的, 无法充分考虑宏观经济变量中存在的厚尾现象, 从而可能过度反映 COVID-19 带来的影响, 这也在本文的实证研究部分得到了验证. 总之, 其模型估计结果虽然在稳定性方面有一定的提升, 但仍无法清晰判断 COVID-19 这类极端事件是否会真正带来宏观经济的下行信号.

综合上述考虑, 本文在模型构建、研究视角以及实证应用三个方面做出了相应创新性工作. 在模型构建上, 本文基于得分驱动框架, 又称广义自回归得分 (generalized autoregressive score, GAS) 框架 (Creal et al., 2013) 或动态条件得分 (dynamic conditional score, DCS) 框架 (Harvey, 2013), 以一种观测值驱动的视角对混频动态因子模型建模, 称为得分驱动的混频动态因子 (score-driven dynamic factor model, SD-MDFM) 模型. 相比传统参数驱动模型, 得分驱动观测值驱动模型的优点在于能够以非常直接的方式将厚尾分布的影响反映到共同

因子更新过程,同时又保证似然函数具有显式的解析形式,从而极大似然估计可以准确且高效地进行.数值模拟结果充分验证了模型估计量的一致性以及考虑数据厚尾分布的重要性.

在研究视角上,本文从美国宏观经济数据集出发,将基于正态分布假设的 SD-MFDFM 模型与引入  $t$  分布的模型估计结果相比较,旨在验证 COVID-19 冲击下 SD-MFDFM 模型的优势,并探讨重大事件冲击的影响.实证结果表明,基于正态分布的 SD-MFDFM 模型呈现出极为明显的参数不稳定性,且反映在共同因子估计上,其往往会对 COVID-19 时期经济变量的波动做出过度的反应,将其视为极其显著的经济下行信号.与之相比,考虑厚尾分布的 SD-MFDFM- $t$  模型则体现出了非常明显的参数估计稳健性,并且相比金融危机时期出现的明显下行信号.美国场景下,SD-MFDFM- $t$  模型将 COVID-19 视作一个来自尾部风险的极端事件,并且 COVID-19 后期信心指数的上升充分体现了美国相关刺激性政策对于经济增长带来的正向影响.进一步地,本文在 SD-MFDFM 模型中引入时变波动率设定,以考察其对于模型参数及因子估计的影响.结果表明,尽管考虑时变波动率能够一定程度上减少正态分布下 MFDFM 模型的不稳定性,但在 COVID-19 的冲击下,正态分布的 MFDFM 模型仍然会对极端事件带来的宏观经济波动做出过度反应,与之相比,考虑随机波动率的 SD-MFDFM 模型估计结果与先前一致,其仍然将 COVID-19 视为来自厚尾部分的结果.

在实证应用上,本文以模拟实验和美国数据集的初步尝试为基础,利用 CPI、M1、进出口增速等中国宏观经济指标,基于 SD-MFDFM 模型簇测算了中国景气一致指数.研究表明,月度及季度的中国宏观经济时间序列均具波动性强的特点,存在明显的尖峰厚尾特征.研究表明,中国场景下,引入厚尾分布的 SD-MFDFM- $t$  模型相比于正态分布的混频动态因子模型呈现出估计稳定性上的显著优势,GARCH 效应的引入使得模型的拟合优度以及可解释性有了进一步的提升.不仅如此,与美国经济相比,COVID-19 冲击使得中国宏观经济出现了短暂的下行信号,但随后被我国的政策调控快速地缓解.此外,两种场景的比较亦表明,同时引入 GARCH 和厚尾分布对于中国宏观经济景气指数测度而言尤为重要.

本文的余下结构安排如下:第二节给出了得分驱动混频动态因子模型的基本理念、设定以及估计方法,并将其与参数驱动模型相比较;第三节设计了模拟实验,旨在验证所提出模型在估计上的准确性以及在混频动态因子模型中考虑厚尾分布的重要性;第四节给出美国宏观数据下的实证研究,旨在进一步验证考虑厚尾分布的重要性,并通过数据驱动的方法阐明 COVID-19 对于美国经济而言更多的是一个尾部风险事件,而没有带来显著的经济下行信号;第五节基于中国宏观数据集,使用 SD-MFDFM 模型簇测度了中国景气一致指数;第六节总结全文,讨论未来的延拓方向.

## 2 得分驱动混频动态因子模型

本节首先基于混频动态因子的基本框架,介绍其基本建模理念,然后给出得分驱动混频动态因子模型的基本设定.进一步地,将该设定与传统参数驱动模型设定相比较,突出得分驱动模型设定的优点,最后给出模型的参数极大似然估计方法,讨论相应的统计性质.

## 2.1 基本框架

设  $Y_t$  为时刻  $t$  的  $N$  维向量, 该向量包含高频经济和金融指标. 对于第  $i$  个指标  $Y_{i,t}$ , 其对应的高频增长率的对数形式可以定义为  $y_{i,t} = \log Y_{i,t} - \log Y_{i,t-1}$ . 同时, 假设  $\tilde{Y}_{i,t}$  是对应于  $Y_{i,t}$  的低频指标, 该指标于每  $k_i$  期进行一次采样,  $\tilde{y}_{i,t}$  则为相应的对数形式的低频增长率.

根据高频和低频对数增长率之间的加和关系, 若  $Y_{i,t}$  是存量变量 (stock variable), 有:

$$\tilde{y}_{i,t} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{k_i-1} y_{i,t-j}, & \text{若 } \tilde{y}_{i,t} \text{ 可观测;} \\ \text{NA}, & \text{若 } \tilde{y}_{i,t} \text{ 不可观测,} \end{cases} \quad (1)$$

其中, NA 表示缺失值. 此外, 如果  $Y_{i,t}$  是流量变量 (flow variable), 参照 Banbura et al. (2010) 的做法, 可以得到低频和高频增长变量之间的关系为:

$$\tilde{y}_{i,t} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{j+1}{k_i} y_{i,t-j} + \sum_{j=k_i}^{2k_i-1} \frac{2k_i-j-1}{k_i} y_{i,t-j}, & \text{若 } \tilde{y}_{i,t} \text{ 可观测;} \\ \text{NA}, & \text{若 } \tilde{y}_{i,t} \text{ 不可观测.} \end{cases} \quad (2)$$

进一步地, 参照 Stock and Watson (1989, 1991) 以及 Aruoba et al. (2009) 的研究工作, 本节假设一个潜在的共同因子  $f_t$  在  $t$  时刻驱动宏观经济活动, 高频增长率  $y_{i,t}$  依赖于  $f_t$ , 且还可能依赖于  $y_{i,t}$  自身的滞后项. 具体而言, 对于  $i = 1, \dots, N$ , 有:

$$y_{i,t} = \mu_i + \gamma_{i1}y_{i,t-k_i} + \dots + \gamma_{iq}y_{i,t-k_{iq}} + \beta_i f_t + \varepsilon_{i,t}, \quad (3)$$

其中, 随机扰动项  $\varepsilon_{i,t}$  是序列不相关的白噪声.

基于上述共同因子设定, 现在讨论低频变量的聚合表达式. 首先, 根据式 (1), 可以得到以下低频存量变量的等价表达式. 若  $\tilde{y}_{i,t}$  是可观测, 那么有:

$$\tilde{y}_{i,t} = \tilde{\mu}_i + \sum_{j=1}^q \gamma_{ij} \tilde{y}_{i,t-k_{ij}} + \beta_i C_t + E_{i,t}. \quad (4)$$

否则  $\tilde{y}_{i,t} = \text{NA}$ . 其中  $\tilde{\mu}_i = k_i \mu_i$ ,  $C_t = \sum_{j=0}^{k_i-1} f_{t-j}$  和  $E_{i,t} = \sum_{j=0}^{k_i-1} \varepsilon_{i,t-j}$ . 因为聚合表达式中的各聚合随机扰动项  $E_{i,t-k_{ij}}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  相互并无时间上的重叠, 因此对于可以观测到的时间序列  $\tilde{y}_{i,t-k_{ij}}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  而言, 将其聚合得到表达式中, 随机扰动项仍然是白噪声. 该结果也被 Aruoba et al. (2009) 用于处理高频到低频的聚合以及混频模型的构建.

类似地, 对于低频流量变量, 根据式 (2), 若  $\tilde{y}_{i,t}$  可观测, 可以得到以下等价表达式:

$$\tilde{y}_{i,t} = \tilde{\mu}_i + \sum_{j=1}^q \gamma_{ij} \tilde{y}_{i,t-k_{ij}} + \beta_i C_t + E_{i,t}. \quad (5)$$

否则  $\tilde{y}_{i,t} = \text{NA}$ . 其中与存量情形相同的是  $\tilde{\mu}_i = k_i \mu_i$ , 不同之处则在于流量情况下聚合变量  $C_t = \sum_{j=0}^{2k_i-1} w_j^i f_{t-j}$ , 且  $E_{i,t} = \sum_{j=0}^{2k_i-1} w_j^i \varepsilon_{i,t-j}$ , 其中当  $j = 0, 1, \dots, k_i - 1$  时,  $w_j^i = (j+1)/k_i$ . 当  $j = k_i, \dots, 2k_i - 1$  时,  $w_j^i = (2k_i - j - 1)/k_i$ .

需要注意, 与存量指标情况不同的是, 给定高频随机扰动项  $\varepsilon_{i,t}$ , 流量指标的低频聚合扰动项  $E_{i,t-k_{ij}}, j = 0, 1, \dots$  在时间上是相互重叠且相互关联的. 参照 Weiss (1984) 和 Granger (1988) 的研究, 可以证明对于  $E_{i,t-k_{ij}}, j = 0, 1, \dots$  而言, 存在一个等价的一阶移动平均或 MA(1) 表达式  $E_{i,t} = e_{i,t} + \vartheta_i e_{i,t-k_i}$ , 其中参数  $\vartheta_i = (k_i^2 - 1)/\sqrt{15k_i^4 + 18k_i^2 + 3}$  (证明详见附录 A). 这说明当  $k$  大于 10 时, 参数  $\vartheta$  几乎保持不变.

## 2.2 得分驱动模型

现在考虑建立一个由月度和季度指标组成的月度混频动态因子模型. 记观测向量为  $\mathbf{y}_t = (y_t^M, y_t^{FQ}, y_t^{SQ})'$ , 其中  $\mathbf{y}_t^M$  是月度变量组成的  $n_M \times 1$  维向量,  $\mathbf{y}_t^{FQ}$  是季度流量变量组成的  $n_{FQ} \times 1$  维向量, 而  $\mathbf{y}_t^{SQ}$  是季度存量变量构成的  $n_{SQ} \times 1$  维向量. 该设定下, 有  $k_i = 3$ .

基于混频动态因子模型的基本框架, 可以将观测过程设定为

$$y_t^M = c^M + \sum_{j=1}^q \Phi_j^M y_{t-j}^M + \beta^M f_t + \varepsilon_t^M, \quad (6)$$

$$y_t^{FQ} = c^{FQ} + \sum_{j=1}^q \Phi_j^{FQ} y_{t-3j}^{FQ} + \beta^F C_t^F + \varepsilon_t^{FQ} + \vartheta \varepsilon_{t-3}^{FQ}, \quad (7)$$

$$y_t^{SQ} = c^{SQ} + \sum_{j=1}^q \Phi_j^{SQ} y_{t-3j}^{SQ} + \beta^S C_t^S + \varepsilon_t^{SQ}, \quad (8)$$

其中  $\vartheta = 4/\sqrt{345}$ ,  $c^M$ 、 $c^{FQ}$  和  $c^{SQ}$  分别为月度变量、流量变量和存量变量的截距向量,  $\Phi_j^M = \text{diag}\{\phi_{j1}^M, \dots, \phi_{jn_M}^M\}$ ,  $\Phi_j^{FQ} = \text{diag}\{\phi_{j1}^{FQ}, \dots, \phi_{jn_{FQ}}^{FQ}\}$  和  $\Phi_j^{SQ} = \text{diag}\{\phi_{j1}^{SQ}, \dots, \phi_{jn_{SQ}}^{SQ}\}$  对于  $j = 1, \dots, q$  是自回归系数矩阵, 而  $n_M$ 、 $n_{FQ}$  和  $n_{SQ}$  分别是月度、季度流量和季度存量指标的数量.

此外,  $C_t^{iQ}, i = F, S$  是  $f_t$  的聚合因子, 其用于驱动季度流量和存量指标的低频更新. 与 Mariano and Murasawa (2003) 类似,  $C_t^{FQ}$  是季度流量指标的聚合公共因子, 可以定义为

$$C_t^{FQ} = \frac{1}{3}(f_t + 2f_{t-1} + 3f_{t-2} + 2f_{t-3} + f_{t-4}).$$

对于季度存量指标, 聚合公共因子  $C_t^{SQ}$  为  $C_t^{SQ} = f_t + f_{t-1} + f_{t-2}$ .

最后, 对于公共因子, 本节遵循 Creal et al. (2013) 的广义自回归得分模型 (GAS) 的框架. 假设  $f_t$  的得分驱动更新服从以下自回归更新方程:

$$f_{t+1} = \sum_{j=1}^p \rho_j f_{t-j+1} + \alpha s_t, \quad s_t = I_t^{-\gamma} \nabla_t, \quad (9)$$

其中,  $\rho_j, j = 1, \dots, p$  是自回归系数,  $\nabla_t = \frac{\partial \log p(\mathbf{y}_t | f_t, \theta)}{\partial f_t}$  是条件得分函数,  $I_t = E_{t-1}[\nabla_t \nabla_t']$  为条件信息函数. 额外的模型参数  $\gamma$  可以预先设定, 通常取值为 0、1/2 或 1. 当  $\gamma = 0$  时,  $s_t = \nabla_t$ . 如果  $\gamma = 1$  ( $\gamma = 1/2$ ), 条件得分  $\nabla_t$  由 Fisher 信息矩阵  $I_t$  的逆 (或其平方根) 所调整, 从而一定程度上控制了更新项  $s_t$  对  $f_{t+1}$  的影响. 基于模拟和实证应用的效果, 本节令  $\gamma = 1/2$ .

对于式 (6)~(8) 中的误差项  $\varepsilon_t = (\varepsilon_t^{M'}, \varepsilon_t^{FQ'}, \varepsilon_t^{SQ'})'$ , 本节假设它们为独立同分布, 且对于  $\varepsilon_{it}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , 假设其服从:

$$\varepsilon_{it} \sim \mathcal{D}_i(0, \sigma_i^2, \varphi_i), \quad (10)$$

其中  $\sigma_i^2$  是第  $i$  个指标的方差参数,  $\varphi_i$  是第  $i$  个分布的参数.

当下, 以 Mariano and Murasawa (2003) 为代表的混频动态因子模型设定, 其往往假设随机扰动项服从正态分布. 究其原因, 是因为正态分布假设下, 能够推得模型等价的线性高斯状态空间表达式. 在此基础上, 经典的卡尔曼滤波得以进行, 从而可以实现模型的极大似然估计. 倘若假设变量的分布为学生  $t$  分布甚至更为复杂的分布, 则需要利用 MCMC 这类数值模拟方法方能实现传统模型的估计, 这是计算上相当困难的问题. 与之相比, 后文将会展示, 得分驱动模型设定下即使假设随机扰动项服从厚尾分布, 仍然可以直接通过极大似然估计实现对于混频动态因子模型的模型估计.

需要强调的是, 在本文提出的 SD-MDFM 的框架是非常广义的建模框架. 对于  $\varepsilon_{it}$  而言, 可以考虑除了正态分布以外的学生  $t$  分布, 还可以进一步引入宏观经济指标的偏态特征, 即假设  $\varepsilon_{it}$  服从偏态  $t$  分布 (Adrian et al., 2019; Karlsson et al., 2023), 甚至可以假设  $\varepsilon_{it}$  服从混合正态分布 (Catania, 2021), 利用混合正态分布对于未知连续分布的逼近能力, 从而得到稳健于分布设定的结果. 当然, 这些设定也涉及到参数数量上升, 模型复杂度提升的问题. 鉴于本文关注两个重要建模问题, 一是在混频动态因子模型中考虑宏观经济变量的厚尾特征是否有助于降低模型参数估计的不稳定程度, 二是引入厚尾特征的混频动态因子模型是否能够得到更为准确的模型拟合结果, 尤其是有助于提高估计得到的宏观经济景气指数的准确性和可解释性, 本文考虑随机扰动项  $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \dots, \varepsilon_{N,t})'$  服从正态或学生  $t$  分布的情况, 通过对比两种情况下模型的拟合效果考察极端事件对模型稳定性的影响.

首先假设  $\varepsilon_{i,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . 在正态分布假设下, 给定  $t$  时刻之前的信息集  $\mathcal{F}_{t-1}$ , 观测向量  $y_t$  的条件对数似然函数为:

$$\log p(y_t | f_t, \theta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \delta_t^i [\log 2\pi + \log \sigma_i^2 + \varepsilon_{i,t}^2 \sigma_i^{-2}], \quad (11)$$

其中,  $\varepsilon_{i,t}$  由式 (6)~(8) 定义,  $\delta_t^i$  是一个虚拟变量, 当  $y_{i,t}$  被观测时为 1, 否则为 0. 以下命题提供了条件得分  $\nabla_t$  和 Fisher 信息函数  $I_t$  的具体形式:

**命题 1** 给定时间  $t$  的条件对数似然 (式 (11)), 条件得分  $\nabla_t$  具有以下形式:

$$\nabla_t = \sum_{i=1}^{n_M} \delta_t^i \beta_i \varepsilon_{i,t} \sigma_i^{-2} + \frac{1}{3} \sum_{i=n_M+1}^{n_M+n_{FQ}} \delta_t^i \beta_i \varepsilon_{i,t} \sigma_i^{-2} + \sum_{i=n_M+n_{FQ}+1}^N \delta_t^i \beta_i \varepsilon_{i,t} \sigma_i^{-2}. \quad (12)$$

Fisher 信息函数具有以下形式:

$$I_t = \sum_{i=1}^{n_M} \delta_t^i \beta_i^2 \sigma_i^{-2} + \frac{1}{9} \sum_{i=n_M+1}^{n_M+n_{FQ}} \delta_t^i \beta_i^2 \sigma_i^{-2} + \sum_{i=n_M+n_{FQ}+1}^N \delta_t^i \beta_i^2 \sigma_i^{-2}. \quad (13)$$

命题 1 的证明见附录 B. 本文将式 (6)~(13) 给出的模型称为月度和季度增长数据下的得分驱动混合频率动态因子 (score-driven mixed-frequency dynamic factor model under normal assumption, SD-MFDFM-N) 模型, 也被称为月度 SD-MFDFM-N 模型.

第二种情况是假设  $\varepsilon_{i,t} \sim t_{\nu_i}(0, \sigma_i^2)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , 换言之, 所有  $\varepsilon_{i,t}$  均服从学生  $t$  分布, 该假设充分考虑了变量可能存在的厚尾特征. 类比正态分布下的模型命名方法, 本文将该假设下的模型称为月度 SD-MFDFM- $t$  模型. 该情况下, 给定  $\mathcal{F}_{t-1}$ , 观测向量  $y_t$  的条件对数似然函数为:

$$\log p(y_t | f_t, \theta) = \sum_{i=1}^N \delta_t^i \left[ \beta - \frac{\nu_i + 1}{2} \log(1 + \varepsilon_{i,t}^2 / [(\nu_i - 2)\sigma_i^2]) \right], \quad (14)$$

其中,  $\beta = \log \Gamma((\nu_i + 1)/2) - \frac{1}{2} \log(\nu_i - 2) - \frac{1}{2} \log \pi - \log \sigma_i - \log \Gamma(\nu_i/2)$ ,  $\varepsilon_{i,t}$  和  $\delta_t^i$  的定义与前面相同. 以下命题提供了条件得分  $\nabla_t$  和缩放因子  $I_t$  的具体表达式:

**命题 2** 给定时间  $t$  的条件对数似然 (式 (14)), 条件得分函数  $\nabla_t$  具有以下形式:

$$\nabla_t = \sum_{i=1}^{n_M} \delta_t^i \beta_i w_{i,t} \varepsilon_{i,t} \sigma_i^{-2} + \frac{1}{3} \sum_{i=n_M+1}^{n_M+n_{FQ}} \delta_t^i \beta_i w_{i,t} \varepsilon_{i,t} \sigma_i^{-2} + \sum_{i=n_M+n_{FQ}+1}^{n_M+n_{FQ}+n_{SQ}} \delta_t^i \beta_i w_{i,t} \varepsilon_{i,t} \sigma_i^{-2}. \quad (15)$$

Fisher 信息函数具有以下形式:

$$I_t = \sum_{i=1}^{n_M} \delta_t^i \eta_i \beta_i^2 \sigma_i^{-2} + \frac{1}{9} \sum_{i=n_M+1}^{n_M+n_{FQ}} \delta_t^i \eta_i \beta_i^2 \sigma_i^{-2} + \sum_{i=n_M+n_{FQ}+1}^{n_M+n_{FQ}+n_{SQ}} \delta_t^i \eta_i \beta_i^2 \sigma_i^{-2}, \quad (16)$$

其中  $w_{i,t} = (\nu_i + 1) / [(\nu_i - 2) + \varepsilon_{i,t}^2 \sigma_i^{-2}]$  和  $\eta_i = (\nu_i + 1) \nu_i / [(\nu_i + 3)(\nu_i - 2)]$ .

命题 2 的证明见附录 C. 相比正态分布, 考虑了学生  $t$  分布的  $f_t$  的更新过程, 其更新项  $s_t$  为一个额外的权重参数  $w_{i,t}$  所控制. 当  $t$  时刻宏观经济变量出现异常波动时, 其对  $f_{t+1}$  的影响会在一定程度上被  $w_{i,t}$  所吸收, 从而在充分考虑极端事件来自厚尾分布的基础上, 考察经济变量的异常波动对于因子更新路径的影响.

### 2.3 与参数驱动模型相比较

不难看出, 本节所提出的 SD-MFDFM 模型中的共同因子是基于观测值驱动的, 即在模型正确设定下, 给定过去的信息, 因子能够被完全预测. 这与 Mariano and Murasawa (2003)、Aruoba et al. (2009) 和 Banbura et al. (2010) 中提出的系列具有代表性的混频动态因子模型存在较大区别. 前述文献提出的模型中, 共同因子通常被假设为遵循一个自回归 (AR) 过程, 即:

$$f_{t+1} = \sum_{j=1}^p \rho_j f_{t+1-j} + \eta_t, \quad (17)$$

其中误差项  $\eta_t$  服从正态分布, 即  $\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$ . 我们称这类混频动态因子模型为参数驱动 (parameter driven) 的 MFDFM 或 PD-MFDFM 模型.

在实际应用中, 由于 PD-MFDFM 模型中的随机扰动项  $\varepsilon_{i,t}$  通常被假设为正态分布, 因此模型可以被改写为状态空间表达式. 在状态空间表达式下, 可以轻易地使用经典卡尔曼滤波和极大似然估计法实现模型中的参数估计, 并提取潜在的共同因子. 然而, 如前所述, 基于正态分布的模型难以考察宏观经济变量存在的厚尾现象, 因此估计得到的因子可能存在过度的异常波动. 与之相比, 倘若在模型中考虑学生  $t$  分布, 传统基于高斯状态空间表达式的估计方法不再适用, 且模型的似然亦不再具有闭式形式, 此时需要使用 MCMC 相关的数值模拟方法估计模型参数. 数值模拟方法会导致巨大的计算负担, 从而限制了模型可以利用的信息集, 前述局限在当下数据丰富的时代变得尤为明显.

与 PD-MFDFM 模型相比, 本文提出的 SD-MFDFM 模型在模型估计以及因子外推上具有明显的优势. 具体而言, 所提出的 SD-MFDFM 模型即使在观测密度服从学生分布时, 仍然可以通过对数似然的得分函数推导得到共同因子的更新过程. 该更新过程在形式上简约, 且模型的条件对数似然函数存在闭式形式, 因此可以直接通过极大似然估计法得到模型参数的估计量. 第三节的模拟研究将会充分证明估计量良好的统计学性质. 此外, 闭式的似然函数使得本文提出的 SD-MFDFM 模型在高维场景仍然是估计上可行的.

## 2.4 极大似然估计

现在介绍 SD-MFDFM 模型的估计方法. 令  $\theta$  为未知参数向量, 其包含所有的模型参数如  $\beta$ 、 $\Phi$ 、 $\rho$  等. 进一步假设模型的初始值为  $\mathcal{F}_0 = (y_0, \dots, y_{1-m})$ 、 $f_0 = (f_0, \dots, f_{1-m})$ , 以及  $C_0^{iQ} = (C_0^{iQ}, \dots, C_{1-m}^{iQ})'$ , 其中  $i = F, S$ ,  $m = \max(p, 3q, 5)$ .

假设可用的数据集是  $\{y_{1-m}, \dots, y_0, y_1, \dots, y_T\}$ . 基于初始值  $(\mathcal{F}_0, f_0$  和  $C_0^{iQ})$  的对数似然函数为:

$$\mathcal{L}_T(\theta) = \sum_{t=1}^T \log p(y_t | \mathcal{F}_{t-1}, \theta) = \sum_{t=1}^T \log p(y_t | f_t, \theta). \quad (18)$$

在特定时间点  $t$  的条件对数似然值由(11)给出. 给定一组参数  $\theta$ , 可以根据得分驱动更新方程递归地得到  $f_t$ , 其中  $t = 1, \dots, T$ , 从而可以计算对数似然函数  $\mathcal{L}_t(\theta)$ , 然后通过极大似然估计法得到  $\theta$  的极大似然估计量.

从统计推断的角度看, 得分驱动模型的极大似然估计是一个方兴未艾的研究课题. Harvey (2013) 以及 Blasques et al. (2022) 推导了单变量得分驱动模型极大似然估计的统计学性质, Andres (2014)、Blasques et al. (2016)、Gorgi et al. (2021) 等工作则对于特定模型给出了极大似然估计量的统计学性质. 本文遵循Creal et al. (2013) 的基本思路, 推测在模型正确设定情形下, 基于一定正则化条件,  $\theta$  的极大似然估计量服从以下渐近正态分布:

$$\sqrt{T}(at\theta - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, -\mathcal{H}^{-1}), \quad (19)$$

其中  $\mathcal{H} = -E[\partial \mathcal{L}_T / \partial \theta \theta^T]$  为对数似然函数关于  $\theta$  的海森矩阵. 实证研究中, 本文基于 BFGS 类型的非线性最优化算法最大化式 (18), 进而得到  $\theta$  的极大似然估计量, 并基于最优处的对数似然的逆 Hessian 估计量来计算估计参数的标准误差和  $t$ -值<sup>2</sup>. 对于  $\hat{f}_t$  的置信区间的估

<sup>2</sup>具体而言, 本文采用了 OxMetrics 中的 MaxSQP 最优化程序包, 该方法基于序贯二次规划方法, 以实现在非线性约束下最小化给定的非线性函数.

计量, 本节参考 Blasques et al. (2016) 中基于数值模拟计算得分驱动时变参数置信区间的方法, 首先估计得到  $\hat{\theta}$  以及  $\hat{\mathcal{H}}$ , 然后从  $\hat{\theta} \sim \mathcal{N}(\theta, -\hat{\mathcal{H}}^{-1})$  中反复抽取  $M$  个模型参数向量  $\hat{\theta}^{(1)}, \dots, \hat{\theta}^{(M)}$ , 基于此计算动态因子估计量  $\{\hat{f}_t\}_{t=1}^{T(1)}, \dots, \{\hat{f}_t\}_{t=1}^{T(M)}$ , 从而通过  $M$  次抽样的对应分位点构建  $\{\hat{f}_t\}_{t=1}^T$  的置信区间.

在实际应用中, 为了降低复杂性, 可以将初始值设置为  $f_0 = f_{-1} = \dots = f_{1-m} = 0$ , 以及  $C_0^{iQ} = \dots = C_{1-m}^{iQ} = 3f_0$ , 其中  $i = F, S$ . 某些特定设定下, SD-MFDFM 可能不会满足可逆性条件 (invertibility condition), 即初始值  $f_0, \dots, f_{1-m}$  的设定可能会影响最后模型的估计结果, 此时需要将其视作待估模型参数, 通过极大似然估计得到其估计量.

最后, 需要注意, 由于混频动态因子模型涉及到因子载荷和共同因子的乘积, 因此其存在识别问题, 即对因子载荷和共同因子分别同时乘以或除以相同的正数, 或者对载荷和共同因子同时乘以  $-1$ , 得到的模型估计结果不变. 为了解决这一问题, 本节参考 Stock and Watson (2016) 的做法, 通过命名因子归一化 (named factor normalization) 方法, 以克服共同因子存在的识别问题. 具体而言, 令某个特定的变量  $y_{i,t}$  的因子载荷  $\beta_i = 1$ , 这样一来,  $y_{i,t}$  的共同成分即为  $f_t$  (高频) 或者  $C_t$ . 换言之, 去除  $y_{i,t}$  的自回归效应之后,  $f_t$  的一个单位的提升会带来相应的一个单位 (月度和季度存量数据) 或  $1/3$  单位 (季度流量数据) 的提升, 从而实现对于因子的识别. 实际应用中, 往往将 GDP 增长率的因子载荷系数设为 1, 从而估计出来的共同因子能够反映出宏观经济的景气程度.

### 3 数值模拟研究

本节通过设计模拟实验, 研究所提出的 SD-MFDFM 模型的极大似然估计在有限样本上的表现, 所有的模型参数估计量及其标准差均是通过同一种非线性优化方法得到, 从而具有较好的可比性.

#### 3.1 SD-MFDFM-N 设定下的有限样本表现

首先考察 SD-MFDFM-N 为正确设定情形下, 本文所提出的两种模型的估计效果. 令  $p = q = 1$  且  $n_M = 4$ ,  $n_{Fq} = 1$  和  $n_{SQ} = 0$ . 本小节考虑生成样本长度为  $T$  的时间序列 ( $T = 300, 600$  或  $1500$ , 分别对应于到季度数据的时间长度为  $100, 200$  和  $500$ ). 具体数据生成过程 (记为 DGP1) 如下:

$$\begin{aligned} y_{i,t} &= \phi_i y_{i,t-1} + \beta_i f_t + \varepsilon_{i,t}, \quad \varepsilon_{i,t} \sim (0, \sigma_i^2), \quad \text{对于 } i = 1, 2, 3, 4, \\ y_{5,t} &= \phi_5 y_{5,t-3} + \beta_5 C_t + \varepsilon_{5t} + \frac{4}{\sqrt{345}} \varepsilon_{5,t-3}, \quad \varepsilon_{5,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_5^2), \\ \nabla_t &= \sum_{i=1}^4 \beta_i \varepsilon_{i,t} \sigma_i^{-2} + \frac{1}{3} \delta_t \beta_5 \varepsilon_{5,t} \sigma_5^{-2}, \\ I_t &= \sum_{i=1}^4 \beta_i^2 \sigma_i^{-2} + \frac{1}{9} \delta_t \beta_5^2 \sigma_5^{-2}, \\ f_{t+1} &= \rho f_t + \alpha s_t, \quad s_t = I_t^{-1/2} \nabla_t, \end{aligned}$$

其中,  $C_t = \frac{1}{3}(f_t + 2f_{t-1} + 3f_{t-2} + 2f_{t-3} + f_{t-4})$ , 且当  $t/3$  为整数时,  $\delta_t = 1$ , 否则  $\delta_t = 0$ . 注意,  $y_{5,t}$  是一个低频变量, 因此在实际生成数据中仅保留其每隔 3 次的观测值, 并将其他两次观测值设置为缺失. 具体的真实参数值如下:

$$\beta_1 = \cdots = \beta_5 = 1.00, \phi_1 = \cdots = \phi_5 = 0.30, \sigma_1 = \cdots = \sigma_5 = 0.30, \rho = 0.90, \alpha = 0.05.$$

基于 DGP1 生成的样本, 本小节分别使用 SD-MFDFM-N 模型和 SD-MFDFM- $t$  模型, 通过极大似然估计得到模型参数的估计量. 不同的样本长度下, 均重复进行了 200 次数据生成过程, 并进行相应的模型估计. 估计结果的均值和标准误在表 D1 中给出.

从表 D1 中可以得出两个主要结论. 首先, 当真实的数据生成过程是 SD-MFDFM-N 或 DGP1 时, 使用 SD-MFDFM-N 模型的 MLE 估计是相当准确的, 并且在  $T$  从 300 增加到 1500 的过程中, 标准差逐渐减小, 估计值逐渐往真实值靠近, 体现出了估计的一致性特征. 其次, SD-MFDFM- $t$  模型的结果表明, 即使在模型误设情形下, 除了自由度参数之外, 其它模型参数的估计仍然相当准确, 且 SD-MFDFM- $t$  模型对于共同因子的样本内拟合效果接近于 SD-MFDFM-N 模型的结果, 可见考虑更为广义的  $t$  分布, 并不会令模型估计损失太多的效率. SD-MFDFM- $t$  估计得到的  $\nu_i, i = 1, \dots, N$  均高于 100, 亦表明模型已经识别出来此时数据的条件概率密度函数应该服从正态分布.

### 3.2 SD-MFDFM- $t$ 设定下的有限样本表现

接下来考虑月度 SD-MFDFM- $t$  模型的数据生成过程. 与 DGP1 的情形类似, 本小节  $p = q = 1, n_M = 4, n_{Fq} = 1$  和  $n_{SQ} = 0$ , 不同之处在于, 此时 DGP1 中的正态分布的随机扰动项  $\varepsilon_{i,t}, i = 1, \dots, 5$  被替换为服从  $t$  分布的随机扰动项. 同样地, 本小节考虑三种样本长度, 分别为  $T = 300, 600$  和  $1500$ :

$$\begin{aligned} y_{i,t} &= \phi_i y_{i,t-1} + \beta_i f_t + \varepsilon_{i,t}, \quad \varepsilon_{i,t} \sim t_{\nu_i}(0, \sigma_i^2), \quad \text{对于 } i = 1, 2, 3, 4, \\ y_{5,t} &= \phi_5 y_{5,t-3} + \beta_5 C_t + \varepsilon_{5t} + \frac{4}{\sqrt{345}} \varepsilon_{5,t-3}, \quad \varepsilon_{5,t} \sim t_{\nu_5}(0, \sigma_5^2), \\ \nabla_t &= \sum_{i=1}^4 \beta_i w_{i,t} \varepsilon_{i,t} \sigma_i^{-2} + \frac{1}{3} \delta_t \beta_5 w_{5,t} \varepsilon_{5,t} \sigma_5^{-2}, \\ I_t &= \sum_{i=1}^4 \eta_i \beta_i^2 \sigma_i^{-2} + \frac{1}{9} \delta_t \eta_5 \beta_5^2 \sigma_5^{-2}, \\ f_{t+1} &= \rho f_t + \alpha s_t, \quad s_t = I_t^{-1/2} \nabla_t, \end{aligned}$$

其中  $C_t$  和  $\delta_t$  的定义与前文相同,  $w_{i,t} = (\nu_i + 1) / [(\nu_i - 2) + \varepsilon_{i,t}^2 \sigma_i^{-2}]$ , 且  $\eta_i = (\nu_i + 1) \nu_i / [(\nu_i + 3)(\nu_i - 2)]$ . 同样地, 低频变量  $y_{5,t}$  通过保留每 3 个观测值中的末尾值, 并将其他两个观测值设置为缺失值来得到. 对于 DGP2 中的未知模型参数, 其具体取值设置如下:

$$\begin{aligned} \beta_1 = \cdots = \beta_5 &= 1.00, \phi_1 = \cdots = \phi_5 = 0.30, \\ \sigma_1 = \cdots = \sigma_5 &= 0.30, \nu_1 = \cdots = \nu_5 = 4.0, \rho = 0.90, \alpha = 0.05. \end{aligned}$$

附录中的表 D2 中展示了 SD-MFDFM-N 以及 SD-MFDFM- $t$  模型在 DGP2 下的估计结果. 从表 D2 中可以得到几个重要发现. 首先, 在模型正确设定的情形下, SD-MFDFM- $t$  模型的估计结果符合预期, 体现在参数估计表现出一致性, 且共同因子的拟合优度较高. 与之相比, 当数据存在厚尾现象, 却使用基于正态分布假设的 SD-MFDFM-N 模型进行估计时, 参数估计结果与真实值出现明显的偏离. 此外, SD-MFDFM-N 模型估计得到的共同因子的 RMSE 是 SD-MFDFM- $t$  模型的数倍, 且随着样本量的增加, 这种 RMSE 的增加变得更为明显. 结果表明, 当使用 SD-MFDFM-N 模型估计具有厚尾分布的数据时, 其正态分布随机扰动项的设定不能很好地吸收极端事件带来的影响, 从而导致一些厚尾信息被共同因子错误地吸收, 最终会致使共同因子的估计出现巨大的偏差.

#### 4 基于美国宏观经济数据的实证研究

本节将所提出的混频动态因子模型应用于美国的宏观经济数据, 主要目的是为了将本文所提出的 SD-MFDFM-N 模型、SD-MFDFM- $t$  模型以及传统的 PD-MFDFM 相互比较, 以凸显考虑厚尾分布的优势. 本文考察美国宏观数据集的原因是, 相比中国的 GDP 增长率等宏观经济指标, 美国的宏观经济指标如 GDP、就业等在 2020 年以前整体波动较小, 因此 COVID-19 对美国经济增长带来的冲击更为明显, 这对传统混频动态因子模型带来相当严峻的挑战. 鉴于此, 将前述模型之于美国数据, 在 COVID-19 前后的估计效果进行比较, 能够更为直观地凸显所提出的 SD-MFDFM 模型, 尤其是 SD-MFDFM- $t$  模型的优势. 需要强调, 所提出的模型适用于非对齐数据 (Ragged-Edge Data) 以及混频数据. 此外, 为了与现有的, 考虑时变波动率的延拓方向相比较, 本节扩展了 SD-MFDFM 模型, 以使其能够考虑时变波动率, 并在美国数据集上验证了拓展后的模型在拟合及分析上的优势.

值得一提的是, 现有研究对于经济下行信号的判断方法主要可以总结为以下三种视角: 第一, 计量建模视角. 为得到数据驱动的经济下行信号判断结果, 现有研究往往将 Hamilton (1989) 提出的马尔科夫区制转换 (markov regime switching, MS) 方法与动态因子模型相结合, 在测度出经济景气一致指数的同时判断经济是否出现下行信号 (Kim and Nelson, 1998; Camacho and Perez-Quiros, 2010; 郑挺国和王霞, 2013; 陈磊等, 2019); 第二, 风险测度视角. 近年来, 亦有研究专注于直接对经济指标本身如 GDP、通货膨胀率等进行建模, 通过分位数回归刻画宏观经济指标所存在的“在险值”或者“风险值”, 进而将其辅助作为经济下行信号的判断依据 (郑挺国等, 2023, 2024; 隋建利和吕文强, 2024). 第三, 综合评估视角. 该视角以美国国家经济研究局 (NBER) 刻画经济衰退的定性方法为代表, 基于经济指标下行的深度、持续期和扩散期三个方面对经济指标进行综合分析和讨论, 进而判断经济是否出现下行信号. 本文关于经济下行信号的判断方法借鉴第三类 NBER 的做法, 通过从深度和持续时间两个视角综合地定性评估和判断经济是否出现了下行信号. 具体而言, 倘若在特定时期内经济景气一致指数出现下探, 且该下探持续不超过半年, 则判断此时出现了短暂的经济下行信号. 换言之, 倘若下探的持续的时间超过了半年以上, 且降幅较大, 则判断此时出现了较为强烈的经济下行信号<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>未来工作亦可考虑将 MS 方法与 SD-MFDFM 相结合, 从而数据驱动地对经济下行信号进行判断.

#### 4.1 数据选取

参照Mariano and Murasawa (2003)、Chauvet and Piger (2008) 等文献的指标选取方式, 本节考虑了五个宏观经济指标, 其中四个为月度指标: 工业生产指数 (industrial production, IP)、实际制造和贸易销售额 (real manufacturing and trade sales, Sales)、减去转移支付的个人收入 (personal income less transfer payments, INC) 以及新增非农就业人数 (nonfarm payroll employment, EMP), 覆盖了从 1967 年 1 月到 2023 年 12 月的时间点. 第五个指标是实际 GDP (样本期间为 1967Q1-2023Q4), 其为季度流量变量. 所有数据都来自于 FRED 数据库. 本节使用了季节性调整后的序列, 并将所有指标进行一阶对数差分以得到相应的对数增长率时间序列. 对于季度 GDP 数据, 将季度末增长率视为季度内各月份增长率的加权和, 并将其他月份视作缺失值.

图 1 展示了所有处理后的月度和季度时间序列图. 其中灰色部分为美国国家经济研究局 (NBER) 所定义的经济衰退时期. 如图 1 所示, 所有指标在某些特定时期都显示出异常严重的波动, 例如 2008 年的金融危机和 COVID-19, 正是这样的变动导致使用正态分布假设的模型会出现极大程度的不稳定性, 这也反映了考虑厚尾模型的重要性. 不仅如此, 从图 1 的 QQ 图来看, 所有指标相对于高斯分布都呈现明显厚尾的特征, 因此使用非正态的学生  $t$  分布可能会更为适合数据的具体特征. 此外, 需要强调的是, 尽管部分时间序列数据存在较为明显的缺失, 即数据的开始时间存在差异, 但是如前述的估计方法所示, 本文提出的 SD-MFDFM 模型能够轻松解决数据的缺失和碎尾问题.

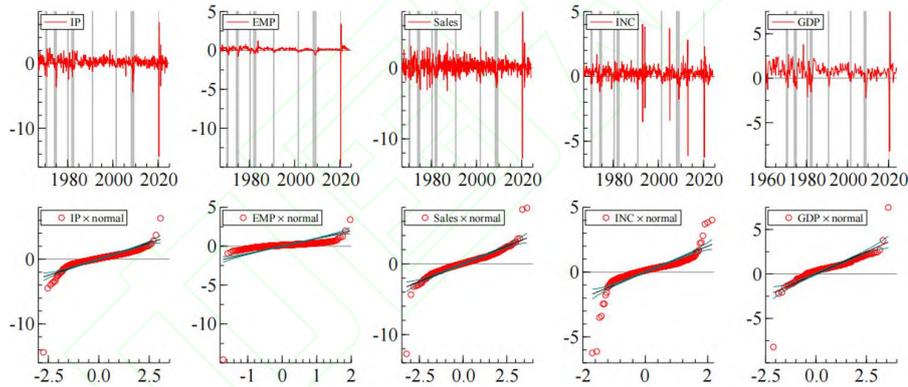


图 1 各宏观指标的增长率时序图和 QQ 图

#### 4.2 实证结果

为减少混频动态因子模型的参数数量, 首先对所有序列进行去均值处理, 可以剔除常数项, 减少待估参数的数量. 这种方法在实际应用中已经被广泛使用, 参见 Stock and Watson (1991), Mariano and Murasawa (2003) 等. 如前所述, 为了解决因子模型存在的识别问题, 以及为了提取得到的共同因子存在可比性, 本节约束季度 GDP 相对应的因子载荷为 1. 本文设定所有使用模型中共同因子的滞后阶数  $p = 1$ , 这样使得模型结果具有可比性, 并且低频变量的特异性扰动中的序列相关性便由其滞后项来刻画.

表 1 分别展示了基于正态和学生  $t$  分布的混频动态因子模型的估计结果. 为考察模型参数估计的稳定性, 表 1 同时报告了使用 COVID-19 之前的样本和使用包含 COVID-19 时期的两组样本的模型估计结果, 即分别考虑了 1967 年 1 月 (1967M1) 至 2019 年 12 月 (2019M12) 和 1967 年 1 月 (1967M1) 至 2023 年 12 月 (2023M12) 的两个样本期. 从表中可以得到以下结论: 首先, SD-MFDFM- $t$  模型在各个样本内的拟合效果明显优于 SD-MFDFM-N. 值得注意的是, 考虑了 COVID-19 疫情的影响后, SD-MFDFM-N 的 AIC 值显著减小, 表明疫情冲击严重影响了其样本内的拟合效果; 其次, 从参数稳定性角度来看, SD-MFDFM- $t$  模型在 COVID-19 疫情前后的结果相对稳定. 只有 Sales 变量对应的参数以及与变量 EMP 对应的参数和发生显著变化, 其他参数的估计结果并没有发生显著变化. 相反, 将 COVID-19 的影

表 1 SD-MFDFM 模型的估计结果

参数	SD-MFDFM-N					SD-MFDFM- $t$				
	IP	Sales	INC	EMP	GDP	IP	Sales	INC	EMP	GDP
样本期: 1967M1–2019M12										
$\beta$	1.1667 (0.1654)	1.3047 (0.1873)	0.6720 (0.1123)	0.6806 (0.1090)	1.00 -	1.1541 (0.1797)	1.5515 (0.2294)	0.5982 (0.1064)	0.5548 (0.2014)	1.00 -
$\phi$	0.0578 (0.0529)	-0.2706 (0.0446)	-0.1666 (0.0414)	-0.1611 (0.0837)	-0.4233 (0.0718)	0.0782 (0.0587)	-0.2613 (0.0496)	0.0882 (0.0261)	0.1173 (0.1743)	-0.3563 (0.0734)
$\sigma$	0.6482 (0.0179)	0.8924 (0.0248)	0.5629 (0.0156)	0.1468 (0.0044)	0.5895 (0.0309)	0.6473 (0.0341)	0.8868 (0.0333)	0.5155 (0.0754)	0.1413 (0.0082)	0.6229 (0.0754)
$\nu$	- -	- -	- -	- -	- -	4.5334 (0.7845)	7.4961 (2.0919)	2.6557 (0.2906)	5.5718 (1.7929)	4.7996 (1.7848)
$\phi_f$			0.8774 (0.0206)					0.9001 (0.0224)		
$\alpha$			0.0925 (0.0111)					0.0681 (0.0108)		
loglik			-1864.91					-1514.18		
AIC			5.9211					4.8339		
样本期: 1967M1–2023M12										
$\beta$	0.6711 (0.1125)	0.6925 (0.1222)	0.2053 (0.0442)	0.3687 (0.0551)	1.00 -	1.2948 (0.2326)	1.5565 (0.2843)	0.6608 (0.1216)	0.9135 (0.1317)	1.00 -
$\phi$	-0.1093 (0.0710)	-0.3542 (0.0664)	-0.1196 (0.0476)	-0.2164 (0.0591)	-0.3757 (0.0303)	0.0729 (0.0564)	-0.1960 (0.04308)	0.1282 (0.0359)	-0.1179 (0.0056)	-0.2714 (0.0424)
$\sigma$	0.9184 (0.0243)	1.1346 (0.0302)	0.6376 (0.0170)	0.6010 (0.0160)	0.5491 (0.0228)	0.7841 (0.0708)	1.0181 (0.0611)	0.6378 (0.1515)	0.1710 (0.0130)	0.9222 (0.2456)
$\nu$	- -	- -	- -	- -	- -	3.0995 (0.3686)	3.9120 (0.5495)	2.3900 (0.2428)	3.2792 (0.3831)	2.6393 (0.5212)
$\phi_f$			0.0165 (0.0486)					0.9240 (0.0145)		
$\alpha$			0.3690 (0.0158)					0.0429 (0.0085)		
loglik			-3441.25					-1853.65		
AIC			10.1148					5.4872		

响纳入考量后, SD-MFDFM-N 模型的大多数模型参数都发生显著变化, 尤其是与因子估计相关的参数  $\beta$ 、 $\phi$  和  $\alpha$ . 结果表明, 基于正态分布假设的 SD-MFDFM 模型并不适用于分析 COVID-19 这一强烈极端事件冲击下的宏观经济时间序列数据; 最后, 考虑了 COVID-19 的影响后, SD-MFDFM-t 模型中的值有所下降, 表明疫情冲击这一来自重大事件的尾部冲击增加了模型对于宏观经济时间序列的厚尾程度的判断.

为了进一步探究模型参数估计的稳定性, 本小节进行了参数估计的伪实时分析. 首先基于最终数据构建伪实时数据, 然后以 1967 年 Q1 至 2000 年 Q1 的历史数据为第一段观测样本估计 SD-MFDFM-N 和 SD-MFDFM-t 模型, 然后在逐步扩充样本的同时反复估计模型, 最后获得递增样本数据的参数估计序列. 图 2 显示了一些参数的估计结果, 其中包括因子载荷系数  $\beta$ 、自回归系数  $\phi$  和得分驱动更新参数  $\alpha$ , 这些参数对于共同因子的估计起到了关键作用. 从图 2 中可以发现, COVID-19 暴发之前, SD-MFDFM-N 和 SD-MFDFM-t 模型的参数估计结果都相对稳定. 然而, 2020 年 3 月 COVID-19 暴发后, SD-MFDFM-N 模型的参数估计结果发生了显著变化, 而 SD-MFDFM-t 模型的参数估计结果仍然相对稳定. 可见, 相比基于正态分布对于美国重要经济指标进行建模, 基于厚尾分布的 SD-MFDFM-t 模型能够更为稳定地刻画这些宏观经济指标条件分布的动态.

基于表 1 中混频动态因子模型的估计结果, 可以进一步地提取 SD-MFDFM 与 PD-MDFM 模型估计得到的共同因子. 因其代表 GDP 中去除掉自相关因素之后残余的信息部分, 被称为经济景气一致指数 (business cycle coincident index). 提取得到的共同因子为  $\{\tilde{f}_t\}_{t=1}^T$ , 其中  $\tilde{f}_t = f_{t+1|t}$  为基于  $t$  时刻及其之前的信息集, 对  $f_{t+1}$  的一步向前预测. 为了凸显本文方法提取得到的一致指数的合理性, 本节将其与 Mariano and Murasawa (2003) (简

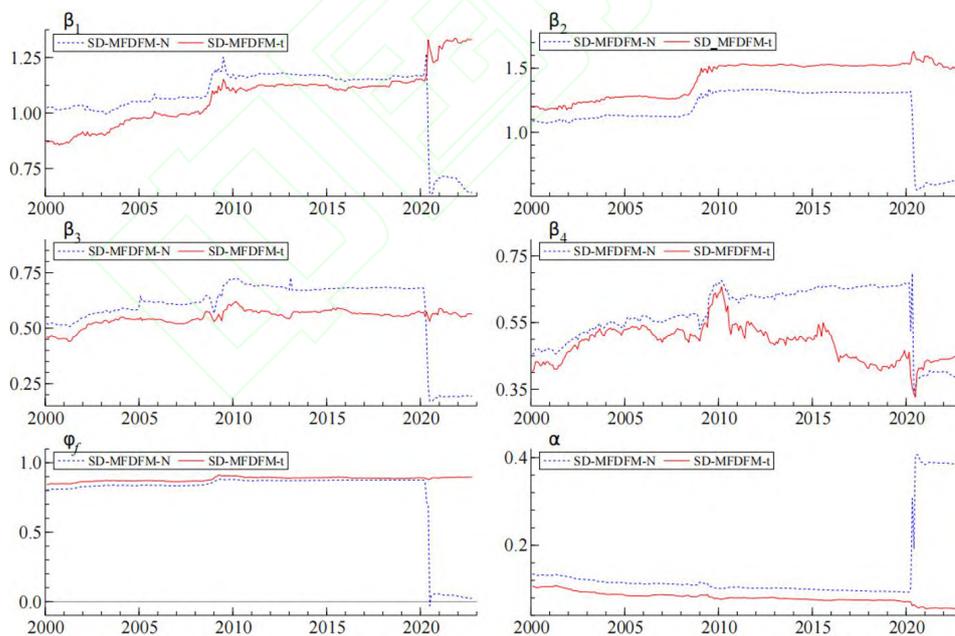


图 2 不同 MFDFM 模型的参数估计稳定性对比

称为 MM2003) 的 PD-DFM 模型提取得到的共同因子相比较, 其为基于卡尔曼滤波和平滑估计后得到的共同因子的平滑估计结果.

图 3 展示了不同模型基于 COVID-19 前后数据集分别提取得到的共同因子. 一个重要发现是, 当使用 SD-MFDFM-N 或 MM2003 模型时, COVID-19 时期的参数估计量呈现出明显的倒  $N$  型波动特征, 而 SD-MFDFM- $t$  模型在疫情期间的估计得到的共同因子并没有显示出明显的下降, 这与金融危机时期的估计结果出现了显著的差异. 究其原因, 当使用 SD-MFDFM- $t$  模型进行估计时, 相比国际金融危机带来的持续性影响, COVID-19 疫情的冲击被模型识别为来自厚尾分布的极端事件, 因此其带来的影响更多程度上被随机扰动项 (噪声部分) 而不是共同因子 (信息部分) 所吸收, 此时 COVID-19 被模型视作宏观经济的尾部风险. 与之相比, SD-MFDFM-N 或 MM2003 模型由于其随机扰动项无法考虑数据中可能存在的厚尾现象, 其 COVID-19 的冲击视为一个强烈的宏观经济下行信号. 此外, 随着 2020 年 3 月 COVID-19 的暴发, 美国政府在 2020 年 4 月推出了前所未有的财政刺激政策, 即高达 2.2 万亿美元的救助基金, 而联邦储备系统将利率区间设定在 0% 到 0.25% 之间, 以低借款成本刺激经济. 从 SD-MFDFM- $t$  的因子估计来看, 这些政策措施反而拉动了美国的经济增长, 因此美国在 COVID-19 前后并没有出现明显的衰退. 另一个重要发现是, 当使用 COVID-19 疫情之前的样本时, 三种不同的混频动态因子模型的估计结果相对接近, 尤其是 SD-MFDFM-N 和 SD-MFDFM- $t$  的结果非常接近. 当使用 COVID-19 疫情之后的样本时, SD-MFDFM-N 的结果变化很大, 波动性增加, 与之相比 SD-MFDFM- $t$  和 MM2003 的结果相对稳定. 这一结果也与之前的参数估计结果相吻合, 体现在 COVID-19 之后使用 SD-MFDFM-N 时, 估计值  $\hat{\phi}_f$  较小, 而  $\hat{\sigma}_\eta$  估计值相对较大.

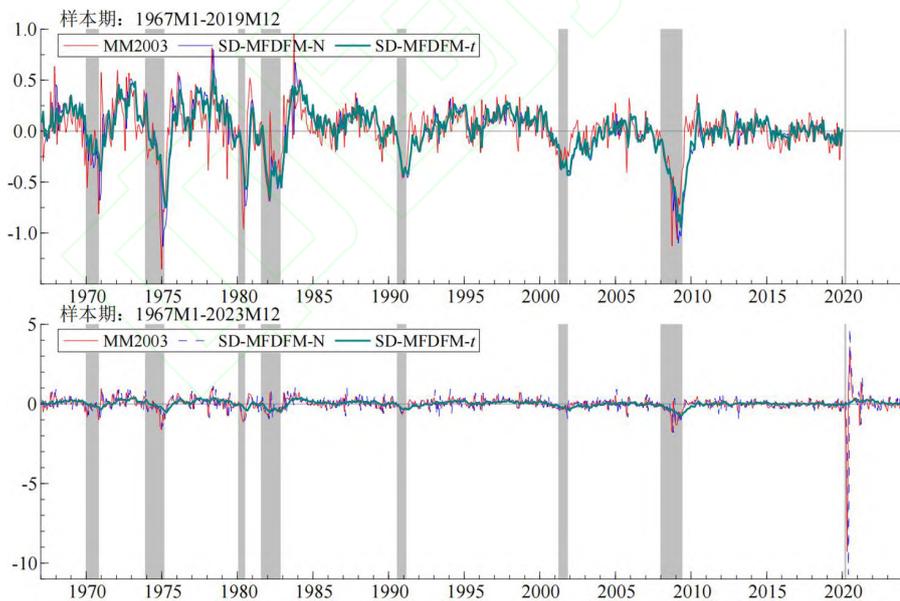


图 3 不同混频动态因子模型提取得到的共同因子

### 4.3 条件异方差的延拓

需要注意的是, 除了假设学生  $t$  分布以外, 时变波动率亦可能产生厚尾的边际分布. Cross and Poon (2016) 和 Chiu et al. (2017) 和 Liu et al. (2019) 的研究均表明, 忽略冲击中存在的条件异方差可能会影响对于数据厚尾程度估计的准确性. 此外, 纽约联邦储备银行在 2023 年 8 月提出的 Nowcast 2.0 模型中, 亦通过引入条件异方差, 一定程度缓解了参数的不稳定性问题 (Almuzara et al., 2023). 为此, 有必要考虑在 SD-MFDFM 模型中引入条件异方差的情况, 并讨论条件异方差对于模型拟合效果以及稳定性的影响.

为了解决这一潜在的问题, 本节假设随机扰动项的条件波动率服从一个 GARCH 过程. 具体而言, 假设式 (6)~(8) 中随机扰动项的波动率时变, 且服从 GARCH(1,1) 过程:

$$\varepsilon_{i,t} \sim D_i(0, \sigma_{i,t}^2, \varphi_i), \quad (20)$$

$$\sigma_{i,t}^2 = \lambda_{i0} + \lambda_{i1}\varepsilon_{i,t-k_i}^2 + \lambda_{i2}\sigma_{i,t-k_i}^2, \quad (21)$$

其中系数  $\lambda_{i0} > 0$ ,  $\lambda_{i1} \geq 0$  和  $\lambda_{i2} \geq 0$ , 本文对于月度数据滞后阶数  $k_i = 1$ , 对于季度数据滞后阶数  $k_i = 3$ ,  $\varphi_i$  为分布中的额外参数. 我们使用  $\sigma_{i,t}^2 = \lambda_{i0} + \lambda_{i1}\varepsilon_{i,t-1}^2 + \lambda_{i2}\sigma_{i,t-1}^2$  来表示前  $n_M$  个季度扰动项的 GARCH 过程, 然后使用  $\sigma_{i,t}^2 = \lambda_{i0} + \lambda_{i1}\varepsilon_{i,t-3}^2 + \lambda_{i2}\sigma_{i,t-3}^2$  来表示最后  $n - n_M$  个季度扰动项的 GARCH 过程.

基于上述设定, 本节将引入 GARCH 效应的 SD-MFDFM-N 模型称为 SD-MFDFM-N-GARCH 模型, 并将引入 GARCH 效应的 SD-MFDFM- $t$  模型称为 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型. 我们仍然使用极大似然估计法对 SD-MFDFM-N-GARCH 和 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型进行估计, 这可以基于第 2.4 节的内容进行扩展. 与之前的分析类似, 本节仍然通过比较 COVID-19 前后两个样本期内模型的估计结果, 考察模型对于美国宏观经济数据的拟合效果.

表 2 给出了 GARCH 扩展模型的估计结果. 从表中可以得到四个主要结论: 第一, 无论是使用 SD-MFDFM-N 模型还是 SD-MFDFM- $t$  模型, 在引入 GARCH 效应后, 模型样本内的拟合结果都得到了一定程度的改善. 与表 1 中的结果相比, 可以看到, 在引入 GARCH 效应后, 所有模型的对数似然值都具有明显改善, AIC 值也显著降低. 这个结果也表明在美国宏观数据中, 引入 GARCH 效应存在其可行性. 当然, 值得注意的是, 即使引入了 GARCH 效应, SD-MFDFM-N-GARCH 模型的拟合效果仍然不如 SD-MFDFM- $t$  模型, 这再次凸显了引入厚尾分布的重要性和必要性; 第二, 对于 SD-MFDFM- $t$  模型而言, 引入 GARCH 效应后, COVID-19 疫情对参数估计的影响仍然并不明显. 而对于 SD-MFDFM-N 模型而言, 虽然引入 GARCH 效应能够一定程度上改善模型参数估计不稳定的现象, 但在 COVID-19 前后, 参数估计的结果, 尤其是各时间序列的自回归系数 ( $\phi$ ) 以及时变波动率的相关参数 ( $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ ) 仍然发生了较为明显的改变. 上述结果表明, 带有 GARCH 效应的 SD-MFDFM-N 模型相比 SD-MFDFM 模型能够一定程度上增加模型的稳定性; 第三, 通过比较表 1 和表 2 中的结果, 可以得出 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型在样本内拟合效果上根据对数似然值和 AIC 值表现得最好. 这也说明在混频动态因子建模中同时引入厚尾分布和时变波动率设定是可行的. 然而, 相比表 1 中不引入 GARCH 效应的 SD-MFDFM- $t$  模型, 引入 GARCH 效应后尽管拟合效果可以得到提升, 许多参数如自回归系数 ( $\phi$ )、GARCH 效应中的参数 ( $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ ) 等在 COVID-19 前后发生明显变动. 最后, 即使引入 GARCH 效应, COVID-19 的冲击

表 2 SD-MFDFM-GARCH 的估计结果

参数	SD-MFDFM-N					SD-MFDFM-t				
	IP	Sales	INC	EMP	GDP	IP	Sales	INC	EMP	GDP
样本期: 1967M1-2019M12										
$\beta$	1.0297 (0.2102)	0.9076 (0.2426)	0.6795 (0.1306)	0.8246 (0.1322)	1.00 -	1.2011 (0.2480)	1.2267 (0.2997)	0.7090 (0.1446)	0.9206 (0.1649)	1.00 -
$\phi$	0.1015 (0.0561)	-0.2295 (0.0453)	0.0531 (0.0777)	-0.1495 (0.0768)	-0.3078 (0.0846)	0.1107 (0.0525)	-0.2262 (0.0450)	0.1595 (0.0457)	-0.1105 (0.0752)	-0.2667 (0.0834)
$\lambda_0$	0.1720 (0.0360)	0.3340 (0.0690)	0.0494 (0.0076)	0.0024 (0.0008)	0.0127 (0.0099)	0.1881 (0.0453)	0.3399 (0.0849)	0.1267 (0.0220)	0.0027 (0.0007)	0.0095 (0.0129)
$\lambda_1$	0.2615 (0.0601)	0.3263 (0.0829)	0.6186 (0.0560)	0.2994 (0.0671)	0.1363 (0.0463)	0.2589 (0.0770)	0.3162 (0.0870)	0.4519 (0.1338)	0.3775 (0.0816)	0.1449 (0.0525)
$\lambda_2$	0.3129 (0.0983)	0.2774 (0.1042)	0.3410 (0.0479)	0.6091 (0.0832)	0.8333 (0.0556)	0.2941 (0.1252)	0.2751 (0.1285)	0.0000 (0.0175)	0.5214 (0.0802)	0.8383 (0.0679)
$\nu$	- -	- -	- -	- -	- -	5.4284 (1.0860)	10.4430 (4.1261)	3.4893 (0.5059)	8.0403 (1.7647)	7.1603 (3.3171)
$\phi_f$			0.9044 (0.0163)					0.9226 (0.0136)		
$\alpha$			0.0588 (0.0093)					0.0442 (0.0080)		
loglik			-1541.02					-1387.49		
AIC			4.9340					4.4669		
样本期: 1967M1-2023M12										
$\beta$	1.1759 (0.2170)	0.8935 (0.2081)	0.5558 (0.1131)	0.6929 (0.2050)	1.00 -	1.1552 (0.2085)	1.0307 (0.2384)	0.5544 (0.1117)	0.6743 (0.1104)	1.00 -
$\phi$	0.0330 (0.0657)	-0.2133 (0.0462)	0.1208 (0.0779)	0.0271 (0.1689)	-0.4041 (0.0947)	0.0789 (0.0524)	-0.2111 (0.0449)	0.1721 (0.0454)	0.0473 (0.0657)	-0.3619 (0.0748)
$\lambda_0$	0.2281 (0.0369)	0.3953 (0.0666)	0.0499 (0.0073)	0.0107 (0.0016)	0.2156 (0.0542)	0.2487 (0.0472)	0.4005 (0.0823)	0.1322 (0.0234)	0.0110 (0.0015)	0.2042 (0.1025)
$\lambda_1$	0.4200 (0.0662)	0.4482 (0.0760)	0.6367 (0.0504)	0.9542 (0.0530)	0.6965 (0.1436)	0.3454 (0.0935)	0.4056 (0.0957)	0.5242 (0.1460)	0.7277 (0.1385)	0.4630 (0.1021)
$\lambda_2$	0.2014 (0.0792)	0.1674 (0.0783)	0.3314 (0.0451)	0.0372 (0.0520)	0.1064 (0.0942)	0.1898 (0.0936)	0.2030 (0.0995)	0.0000 (0.0191)	0.0042 (0.0180)	0.3478 (0.2552)
$\nu$	- -	- -	- -	- -	- -	4.2750 (0.6744)	6.5090 (1.5094)	3.4069 (0.4693)	4.8612 (0.6704)	3.3268 (0.7371)
$\phi_f$			0.8850 (0.0271)					0.9066 (0.0142)		
$\alpha$			0.0707 (0.0111)					0.0489 (0.0081)		
loglik			-2010.58					-1632.25		
AIC			5.9608					5.0083		

下, 模型的  $\nu$  值有仍然所下降, 再次证实疫情冲击增加了模型对于宏观经济时间序列的厚尾程度的判断。

基于前面研究的发现, 本节接下来提取 SD-MFDFM-N-GARCH 和 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型的共同因子, 并与 SD-MFDFM- $t$  模型的因子估计结果进行比较. 图 4 给出了各模型对应的因子估计的结果.

首先, 在引入厚尾分布或条件异方差性后, 三种模型的因子估计结果都相对稳定. 这一结果与之前的参数结果一致, 表明 SD-MFDFM- $t$ 、SD-MFDFM-N-GARCH 和 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型在 COVID-19 前后的估计结果都具有较好的稳定性. 其次, SD-MFDFM- $t$  和 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型提取的因子在整个样本中都相对接近, 但是与 SD-MFDFM-N-GARCH 模型刻画共同因子存在显著的差异. 根据前述的下行信号判断方法, 从图 4 中可以看出, 后者在全样本估计中, 仍然认为 COVID-19 带来了显著的下行风险, 体现在指标出现了快速的下探, 并且在 2020 年底出现反弹, 而 SD-MFDFM- $t$  相关模型则在小幅下降后呈现出了一种上升趋势. 然而, 相比 SD-MFDFM- $t$  模型, SD-MFDFM-N-GARCH 模型所刻画的反弹速度非常缓慢, 存在明显的滞后性, 这体现了没有考虑厚尾分布带来的弊端. 综合以讨论, 本节将 SD-MFDFM-N-GARCH 模型与 SD-MFDFM- $t$  和 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型之间的差异归因于宏观经济景气程度和尾部风险之间的权衡, 即当考虑到厚尾分布时, COVID-19 的影响被视为来自尾部的极端事件而不是下行信号. 最后, 通过比较 COVID-19 期间 SD-MFDFM-N-GARCH 模型和 SD-MFDFM-N 模型的结果, 本小节发现前者提取的因子的变动范围大大减小, 并且没有明显的倒  $N$  型波动, 在 2021 年 6 月之后的数值结果基本上接近 SD-MFDFM- $t$  和 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型.

上述结果表明, 虽然 COVID-19 的冲击可以在一定程度上被 GARCH 效应所吸收, 但其仍然难以对经济情况的恢复做出及时的反映. 此外, 鉴于 SD-MFDFM- $t$  和 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型估计得到的共同因子非常接近, 且 SD-MFDFM- $t$  模型在设定上更为简约,

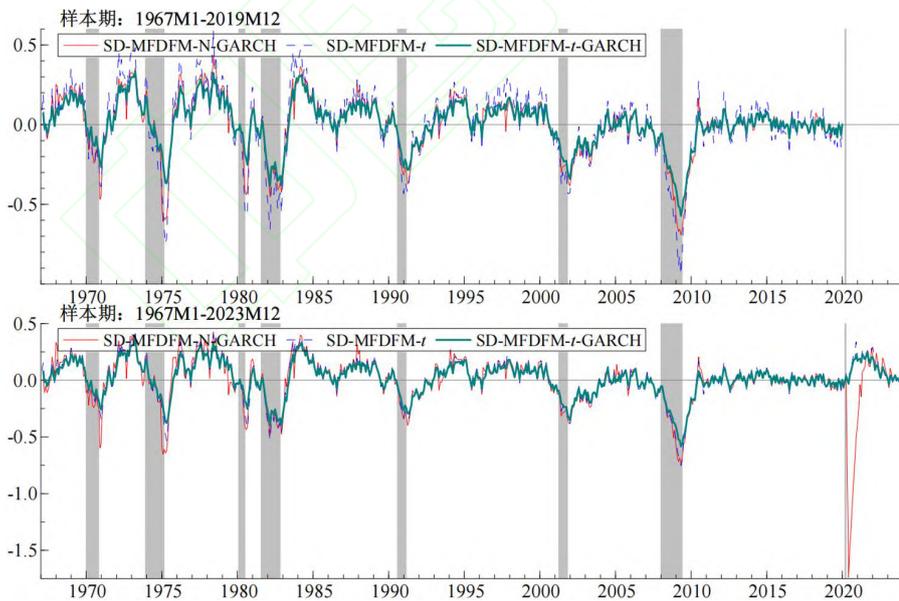


图 4 不同混频动态因子模型提取得到的共同因子

在估计上则体现出更好的稳定性. 因此在实际研究中, 对于美国宏观经济数据而言, 使用 SD-MFDFM- $t$  模型进行宏观经济景气指数的测度可能是更为合理的选择.

## 5 基于中国宏观经济数据的实证研究

本节将所提出的 SD-MFDFM 模型簇运用于测度中国的宏观经济景气指数指标. 与基于美国数据集的实证研究思路类似, 本节首先考察 COVID-19 前与后两个样本期 SD-MFDFM 模型的拟合效果, 将其与经典方法 (MM2003) 相比较, 探究 SD-MFDFM 方法测度中国宏观经济景气指数的合理性与准确性. 然后, 探讨加入条件异方差是否会对估计准确度以及模型的稳定性带来提升作用.

### 5.1 数据选取

鉴于中国宏观经济指标的含义及其所属类别与美国的宏观经济指标存在差异, 我们参照郑挺国和王霞 (2013) 以及郑挺国等 (2023) 的做法, 考虑了八个宏观经济指标, 其中七个为月度经济指标, 分别为: 工业增加值增速 (IP), 固定资产投资完成额增速 (INV), 社会消费品零售总额增速 (Sale), 进出口增速 (IMEX)、税收总额增速 (TAX)、货币增速 (M1) 以及通胀环比 (CPI), 覆盖了从 1990 年 1 月到 2023 年 12 月的时间点. 第八个指标是季度实际 GDP (样本期为 1990Q1-2023Q4), 为流量变量. 所有数据序列都可以从 Wind 数据库中获取. 本节使用了季节调整后的序列, 并将所有指标进行一阶对数差分以得到相应的对数增长率时间序列. 对于季度 GDP 数据, 将季度末增长率视为季度内各月份增长率的加权和, 并将其他月份视作缺失值.

附录 E 中的图 E1 展示了所选用的八个宏观经济指标的环比增长率数据图和 QQ 图. 对比图 E1 结果以及图 1 中美国经济指标的增长率数据和 QQ 图可以发现, 相比美国经济指标存在新冠疫情暴发前波动小、之后剧烈波动的特征, 中国经济指标在全样本内呈现出较大的波动性. 尽管在疫情前后中国宏观经济指标相较于美国宏观指标其波动幅度较小, 但是数据仍然呈现了非常明显的厚尾现象. 这体现在 QQ 图中与正态分布的背离, 呈现出明显的厚尾特征. 根据美国数据分析的结果不难推测, 若使用现有正态分布假设下的混频动态因子模型对中国经济数据进行建模, 很可能出现结果不稳定的现象, 且由于没有在误差项中考虑到厚尾成分, 估计得到的结果会受到数据中剧烈波动的干扰, 从而难以准确、清晰地刻画一些重大事件冲击对于宏观经济运行情况的影响.

### 5.2 实证结果分析

本节首先对所有序列进行去均值处理, 通过剔除常数项以减少待估参数的数量, 同样将约束季度 GDP 所对应的因子载荷为 1, 以解决因子模型存在的识别问题. 简单起见, 假设滞后阶数  $p = 1$ , 这样低频变量的特异性扰动中的序列相关性便由其滞后项来刻画.

表 3 与表 4 分别展示了基于正态和学生  $t$  分布的混频动态因子模型的估计结果. 与美国宏观经济数据相关分析中的做法类似, 为检验模型参数估计的稳定性, 表 3 与表 4 同时报告了使用 COVID-19 之前的样本和使用包含 COVID-19 时期的两组样本的模型估计结果, 即考虑了 1990M1-2019M12 和 1990M1-2022M09 的两个样本期. 对比表 3 和表 4, 以及 COVID-19 前后各模型的估计结果, 可以得到以下结论: 首先, 不论是 COVID-19 前还是

表 3 SD-MFDFM-N 模型的估计结果

参数	IP	INV	Sale	IMEX	TAX	M1	CPI	GDP
样本期: 1990M1-2019M12								
$\beta$	0.6838 (0.1339)	2.7212 (0.5213)	0.9709 (0.2951)	2.3655 (1.0050)	2.5889 (0.9570)	0.6837 (0.2749)	0.1202 (0.0692)	1.00 -
$\phi$	0.4056 (0.0540)	0.4027 (0.0582)	0.2288 (0.0565)	-0.3238 (0.0535)	-0.1532 (0.0546)	0.2915 (0.0543)	0.8276 (0.0302)	-0.2442 (0.1015)
$\sigma$	0.4134 (0.0161)	1.1361 (0.0441)	0.9417 (0.0371)	3.6666 (0.1447)	3.7502 (0.1476)	1.0248 (0.0404)	0.25293 (0.0100)	0.5070 (0.0326)
$\phi_f$	0.9755 (0.0159)							
$\alpha$	0.0423 (0.0104)							
loglik	-3411.85							
AIC	19.1047							
样本期: 1990M1-2023M12								
$\beta$	0.5457 (0.1160)	1.2664 (0.3277)	0.6954 (0.2638)	1.8545 (0.7068)	1.6845 (0.9570)	0.9483 (0.2377)	0.1246 (0.0551)	1.00 -
$\phi$	0.3992 (0.0546)	0.6023 (0.0425)	0.2969 (0.0513)	-0.3071 (0.0505)	-0.1319 (0.0517)	0.2318 (0.0547)	0.8082 (0.0312)	-0.4014 (0.0872)
$\sigma$	0.4442 (0.0162)	1.5343 (0.0561)	1.2927 (0.0476)	3.5339 (0.1301)	4.3803 (0.1613)	1.0267 (0.0376)	0.2495 (0.0092)	0.9338 (0.0570)
$\phi_f$	0.9683 (0.0196)							
$\alpha$	0.0543 (0.0175)							
loglik	-4294.50							
AIC	21.18							

COVID-19 暴发后, SD-MFDFM- $t$  模型的估计效果明显优于 SD-MFDFM-N 模型, 且上述优势不仅体现在对数似然上, 还体现在 AIC 上, 这说明在中国数据上, 引入厚尾分布仍然可以带来模型估计结果的改善.

其次, 考察参数稳定性. 对比 COVID-19 前后模型的参数估计结果可以发现, 虽然相较于美国数据而言, 中国数据上, SD-MFDFM-N 模型在 COVID-19 前后的参数估计结果相对稳定, 但是共同因子的载荷系数仍然发生了较为明显的变化. 与之相比, SD-MFDFM- $t$  模型的参数估计效果则显得更为稳定. 此外, 对于 SD-MFDFM- $t$  模型而言, COVID-19 暴发后, 模型估计得到的值出现了一定幅度的降低, 这也侧面反映出 COVID-19 的发生加重了模型对于中国宏观经济数据厚尾程度的判断, 因此 COVID-19 对中国数据而言亦可能更多地带来了尾部的风险而非经济的下行信号.

接下来, 基于表 3 和表 4 中混频动态因子模型的估计结果, 本文进一步地提取 SD-MFDFM 模型以及 MM2003 模型中估计得到的动态因子, 即中国经济景气一致指数. 图 5

表 4 SD-MFDFM- $t$  模型的估计结果

参数	IP	INV	Sale	IMEX	TAX	M1	CPI	GDP
样本期: 1990M1–2019M12								
$\beta$	1.3940 (0.2186)	0.0759 (0.2009)	1.2133 (0.2725)	3.6275 (1.0212)	4.2541 (1.3036)	1.0189 (0.3177)	0.1966 (0.0785)	1.00 -
$\phi$	0.2649 (0.0772)	0.9329 (0.0335)	0.3180 (0.0547)	-0.4034 (0.0522)	-0.1476 (0.0624)	0.2680 (0.0564)	0.8073 (0.0300)	0.0175 (0.0325)
$\sigma$	0.4405 (0.0531)	9.2254 (8.6923)	1.1562 (0.2690)	3.6543 (0.2477)	3.7499 (0.1957)	1.0517 (0.0816)	0.2509 (0.0143)	0.8101 (0.0655)
$\nu$	2.7496 (0.2619)	2.0031 (0.0058)	2.6589 (0.4928)	4.9430 (1.2877)	8.0115 (3.9527)	4.4288 (1.1527)	6.4886 (2.3406)	2.1767 (0.0160)
$\phi_f$				0.7865 (0.0013)				
$\alpha$				0.0540 (0.0011)				
loglik				-3097.54				
AIC				17.403				
样本期: 1990M1–2023M12								
$\beta$	0.8525 (0.0970)	0.0000 (0.1509)	0.9207 (0.2006)	2.8502 (0.7628)	3.7932 (1.0440)	1.3712 (0.2360)	0.2004 (0.0588)	1.00 -
$\phi$	0.4361 (0.0073)	0.9571 (0.0020)	0.4247 (0.0503)	-0.3778 (0.0233)	-0.0974 (0.0498)	0.2352 (0.0495)	0.7902 (0.0606)	-0.0834 (0.0517)
$\sigma$	2.0324 (1.7701)	23.1778 (5.9758)	3.9459 (5.0362)	3.5265 (0.2182)	4.3325 (0.2931)	1.0636 (0.0823)	0.2482 (0.0136)	1.0086 (0.1415)
$\nu$	2.0255 (0.0453)	2.0007 (0.0003)	2.0503 (0.1339)	5.0635 (1.2469)	4.7227 (1.2407)	3.9229 (0.7526)	6.1718 (2.0123)	2.1640 (0.0195)
$\phi_f$				0.7455 (0.0073)				
$\alpha$				0.0540 (0.0011)				
loglik				-3795.93				
AIC				18.779				

展示了不同模型基于 COVID-19 前后数据集分别提取得到的共同因子。其中灰色阴影部分标注了一些重大事件的时点, 包括: 1) 1997M7–1999M12, 亚洲金融危机; 2) 2003 年 3 月至 2003 年 7 月, 非典型肺炎 (SARS) 暴发; 3) 2005 年 7 月至 2006 年 12 月, 人民币“解冻”; 4) 2008 年 9 月至 2008 年 11 月, 国际金融危机暴发; 5) 2009 年 1 月至 2009 年 12 月, 四万亿财政刺激计划; 6) 2013 年 1 月至 2013 年 12 月, 第三次金融工作会议; 7) 2015 年 6 月至 2016 年 1 月, 千股跌停; 8) 2016 年 1 月至 2016 年 12 月, 供给侧结构性改革提出; 9) 2019 年 1 月至 2019 年 5 月, 中美贸易谈判; 10) 2020 年 1 月至 2020 年 12 月, 新冠肺炎疫情暴发; 11) 2022 年 2 月至 2022 年 12 月, 俄乌冲突暴发。

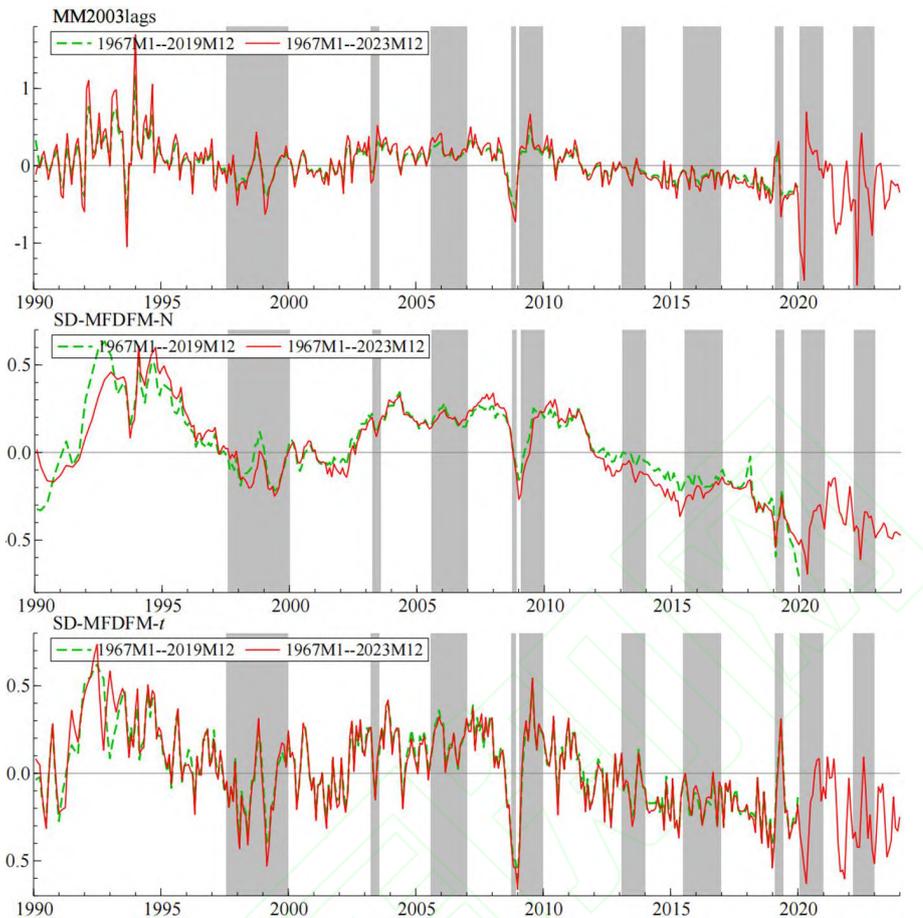


图 5 基于 SD-MFDFM 模型提取得到的共同因子

如图 5 所示, 可以获得如下一些发现: 首先, 不论是基于正态分布假设的 SD-MFDFM-N 和 MM2003 模型, 还是基于厚尾分布的 SD-MFDFM- $t$  模型, 在新冠疫情时期均呈现了较为明显的“先降后升”的倒  $N$  型态势, 可见 COVID-19 时期的确使得中国的宏观经济运行受到了较为强烈的冲击, 出现了短暂的下行信号。其次, 从模型的稳定性角度看, 与 SD-MFDFM- $t$  模型在不同样本期内的估计结果相对更为稳定, MM2003 和 SD-MFDFM-N 模型在两种样本期内的估计结果出现了较为明显的偏差, 体现在 MM2003 在引入 COVID-19 样本后, 其因子的变化幅度显著增加, SD-MFDFM-N 在 COVID-19 前后估计得到的共同因子甚至出现了走势上的显著差异, 这些差异很可能带来宏观经济形势的错误研判, 致使不可靠的政策结论。此外, 基于前述下行信号的判断方法可以发现, 基于正态分布的 MM2003 与 SD-MFDFM-N 模型测得的共同因子, 均将 COVID-19 期间识别为一个显著的经济下行信号, 体现在指标出现了快速并且持续性的下坠。而考虑了厚尾分布的 SD-MFDFM- $t$  模型则在充分区分下行信号和尾部风险的基础上, 认为国际金融危机时期识别为样本内的最低点。不仅如此, SD-MFDFM- $t$  模型对于样本内的重要事件譬如亚洲金融危机、非典型肺炎、国际金融

危机以及随之而来的财政刺激计划,中美贸易谈判等均具有较强的捕捉和刻画能力,相比之下基于正态分布的模型倾向于平滑一些重要事件从而一定程度上丧失了对于重要事件的捕捉能力.最后,与美国宏观数据的建模结果不同,中国宏观数据场景下,基于 SD-MFDFM- $t$  提取得到的共同因和 MM2003 以及 SD-MFDFM-N 相比,在 COVID-19 之前的差异更为显著,更加凸显了中国数据场景下考虑数据厚尾特征的重要性和必要性.

### 5.3 条件异方差的延拓

现在考虑在 SD-MFDFM 模型中引入 GARCH 效应,以考察条件异方差的引入对于中国经济景气指数的测度以及模型的稳定性是否具有明显的帮助.与之前的分析类似,本小节仍然在 COVID-19 前后考察模型估计的结果.

表 5 和表 6 显示了 GARCH 扩展模型的估计结果.对比表 5、表 6 以及 COVID-19 前后 SD-MFDFM-GARCH 模型的拟合效果,可以得到以下几点发现:首先,和美国数据中的实证结果相似,无论是使用 SD-MFDFM-N 模型还是 SD-MFDFM- $t$  模型,引入 GARCH 效应后都能够一定程度地改善模型的样本内的拟合效果.具体而言,与表 3 和表 4 的模型估计结果相比,可以看到,在引入 GARCH 效应后,所有模型的对数似然值都显著提高, AIC 值也显著降低.此时 SD-MFDFM-GARCH 模型的拟合效果略微优于 SD-MFDFM- $t$  模型,这个结果也表明引入 GARCH 效应能够提高模型整体的样本内拟合效果;其次,对于 SD-MFDFM- $t$  模型而言,引入 GARCH 效应后, COVID-19 疫情对参数估计的影响仍然并不明显.而对于 SD-MFDFM-N 模型而言,虽然引入 GARCH 效应能够一定程度上改善模型的拟合效果,但是在 COVID-19 前后,参数估计的结果,特别是各宏观指标时变波动率的相关参数 ( $\lambda_0$ 、 $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ ) 发生了较为明显的改变.上述结果表明,带有 GARCH 效应的 SD-MFDFM-N 模型相比 SD-MFDFM 模型能够一定程度上改善模型的稳定性;第三,通过比较各模型在不同样本期的对数似然值和 AIC 值可以得出,SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型在样本内拟合效果最好,而且其对于模型拟合效果的改善程度,在中国宏观经济数据上尤为明显.这也说明在混频动态因子建模中同时引入厚尾分布和时变波动率设定是很有必要的.

接下来,我们进一步提取 SD-MFDFM-N-GARCH 和 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型的共同因子,并与 SD-MFDFM- $t$  模型的因子估计结果进行比较.图 6 展示了各模型对应的因子估计的结果.据此,我们可以获得如下一些重要结果:

首先,在引入厚尾分布或条件异方差性后,三种模型的因子估计结果都相对稳定.这也与前述参数估计结果的稳定性相互验证,说明了 GARCH 效应的引入对于模型参数估计的稳定性以及共同因子估计结果的稳定性都具有相当程度的提升.

其次,相比 SD-MFDFM-N-GARCH 和 SD-MFDFM- $t$  模型估计得到的共同因子可以发现,尽管引入 GARCH 效应提升了正态分布假设下模型拟合的稳定性,然而提取得到的共同因子将宏观经济的波动尽数吸收在了正态分布下的条件异方差变化中,从而提取得到的信息部分,即宏观经济景气程度部分仍然难以捕捉到一些重要事件如国际金融危机等前后的宏观经济运行情况的变化.与之相比,引入厚尾分布的 SD-MFDFM- $t$  以及 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型对于重要事件的捕捉能力更为明显,这也再次凸显了引入厚尾分布对于宏观经济景气指数测度,尤其是对中国经济景气指数测度带来的有益帮助.

表 5 SD-MFDFM-N-GARCH 模型的估计结果

参数	IP	INV	Sale	IMEX	TAX	M1	CPI	GDP
样本期: 1990M1-2019M12								
$\beta$	1.3932 (0.2798)	1.7965 (0.5741)	0.7420 (0.4441)	7.3446 (1.8796)	3.9106 (1.6578)	0.7965 (0.4139)	0.0890 (0.1012)	1.00 -
$\phi$	0.4033 (0.0607)	0.6311 (0.0635)	0.3531 (0.0610)	-0.4076 (0.0598)	-0.1086 (0.0592)	0.3043 (0.0572)	0.8219 (0.0333)	-0.0560 (0.1234)
$\lambda_0$	0.0217 (0.0069)	0.0051 (0.0019)	0.4176 (0.0878)	7.1002 (3.0094)	0.3230 (0.2093)	0.0104 (0.0077)	0.0108 (0.0058)	0.0201 (0.0107)
$\lambda_1$	0.6618 (0.1186)	0.1312 (0.0156)	0.5552 (0.1498)	0.1211 (0.0633)	0.1096 (0.0334)	0.0997 (0.0258)	0.1795 (0.0729)	0.3556 (0.0905)
$\lambda_2$	0.3308 (0.1200)	0.8674 (0.0157)	0.1005 (0.0948)	0.3421 (0.2432)	0.8728 (0.0364)	0.8980 (0.0264)	0.6568 (0.1396)	0.6107 (0.0940)
$\phi_f$				0.9713 (0.0107)				
$\alpha$				0.0205 (0.0043)				
loglik				-3076.24				
AIC				17.3291				
样本期: 1990M1-2023M12								
$\beta$	1.3804 (0.2454)	1.6588 (0.4441)	0.5380 (0.3648)	5.0067 (1.4205)	3.3457 (1.5886)	1.4092 (0.4624)	0.2094 (0.1000)	1.00 -
$\phi$	0.3646 (0.0095)	0.6592 (0.0043)	0.3117 (0.0579)	-0.3544 (0.0488)	-0.1368 (0.0523)	0.2814 (0.0546)	0.7857 (0.0362)	-0.0972 (0.1210)
$\lambda_0$	0.0041 (0.0017)	0.0058 (0.0021)	0.4843 (0.0784)	9.6841 (6.5100)	0.3737 (0.2114)	0.0285 (0.0156)	0.0068 (0.0057)	0.0175 (0.0082)
$\lambda_1$	0.2210 (0.0426)	0.1449 (0.0163)	0.8807 (0.1055)	0.1200 (0.0585)	0.1276 (0.0323)	0.1452 (0.0428)	0.1315 (0.0606)	0.3641 (0.0596)
$\lambda_2$	0.7775 (0.0429)	0.8534 (0.0165)	0.0363 (0.0534)	0.0894 (0.5640)	0.8589 (0.0350)	0.8494 (0.0442)	0.7629 (0.1397)	0.6112 (0.0590)
$\phi_f$				0.9734 (0.0134)				
$\alpha$				0.0205 (0.0056)				
loglik				-3764.68				
AIC				18.6778				

再次, 比较美国数据以及中国数据下, SD-MFDFM- $t$  和 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 提取得到的共同因子可以发现, 与美国宏观经济数据不同, 中国数据中 SD-MFDFM- $t$  和 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 提取得到的共同因子存在显著区别. 从图 6 中可以发现, 前者 and 后者在共同因子的取值范围上存在区别, 其中 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 提取得到的因子, 其值域与 SD-MFDFM-N-GARCH 模型更为接近. 此外, 虽然二者都能够捕捉到重大事件冲击下宏观

表 6 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型的估计结果

参数	IP	INV	Sale	IMEX	TAX	M1	CPI	GDP
样本期: 1990M1-2019M12								
$\beta$	1.4257 (0.2889)	0.6243 (0.2354)	1.3326 (0.4205)	5.0436 (1.4669)	3.2591 (1.3745)	0.7951 (0.3767)	0.1514 (0.0949)	1.00 -
$\phi$	0.3558 (0.0540)	0.8236 (0.0582)	0.3391 (0.0565)	-0.4065 (0.0535)	-0.0838 (0.0546)	0.3314 (0.0543)	0.8008 (0.0302)	0.0274 (0.1015)
$\lambda_0$	0.0167 (0.0079)	0.0036 (0.0024)	0.5397 (0.1783)	11.1804 (3.4965)	0.3435 (0.2607)	0.0153 (0.0138)	0.0116 (0.0115)	0.0144 (0.0124)
$\lambda_1$	0.4713 (0.1238)	0.0609 (0.0186)	0.5611 (0.2002)	0.1422 (0.0856)	0.1290 (0.0455)	0.1071 (0.0372)	0.1533 (0.1030)	0.3053 (0.1060)
$\lambda_2$	0.5272 (0.1240)	0.9387 (0.0187)	0.0546 (0.1107)	0.0000 (0.3175)	0.8563 (0.0501)	0.8902 (0.0383)	0.6659 (0.2622)	0.6777 (0.1121)
$\nu$	3.6019 (0.6366)	2.7510 (0.3372)	3.5103 (0.8481)	5.6943 (1.6565)	7.7570 (3.2952)	6.2339 (2.7175)	9.3782 (5.1875)	4.0380 (1.3598)
$\phi_f$	(0.6366) (0.0143)							
$\alpha$	0.0242 (0.0060)							
loglik	-2961.33							
AIC	16.7350							
样本期: 1990M1-2023M12								
$\beta$	1.2166 (0.2385)	0.5785 (0.2132)	1.2982 (0.3807)	4.1098 (1.1855)	3.0512 (1.2061)	1.2776 (0.3844)	0.2122 (0.0867)	1.00 -
$\phi$	0.3797 (0.0655)	0.8210 (0.0410)	0.3498 (0.0586)	-0.3690 (0.0514)	-0.0693 (0.0563)	0.3467 (0.0609)	0.7818 (0.0346)	-0.0429 (0.1055)
$\lambda_0$	0.0215 (0.0097)	0.0060 (0.0039)	0.4995 (0.1813)	10.3527 (2.6996)	0.5346 (0.4190)	0.0512 (0.0684)	0.0047 (0.0082)	0.0215 (0.0158)
$\lambda_1$	0.4973 (0.1258)	0.1063 (0.0462)	0.8145 (0.1820)	0.1501 (0.0817)	0.1494 (0.0559)	0.1568 (0.1274)	0.0848 (0.0699)	0.3405 (0.0917)
$\lambda_2$	0.5011 (0.1259)	0.8929 (0.0466)	0.1385 (0.1424)	0.0000 (0.2729)	0.8326 (0.0636)	0.8378 (0.1302)	0.8418 (0.1942)	0.6415 (0.0954)
$\nu$	3.4144 (0.4838)	2.9411 (0.3492)	3.3379 (0.5833)	5.9696 (1.6606)	5.9301 (1.7050)	3.9076 (1.0187)	7.7031 (3.4452)	3.5144 (0.8807)
$\phi_f$	0.9607 (0.0134)							
$\alpha$	0.0252 (0.0056)							
loglik	-3601.51							
AIC	17.9045							

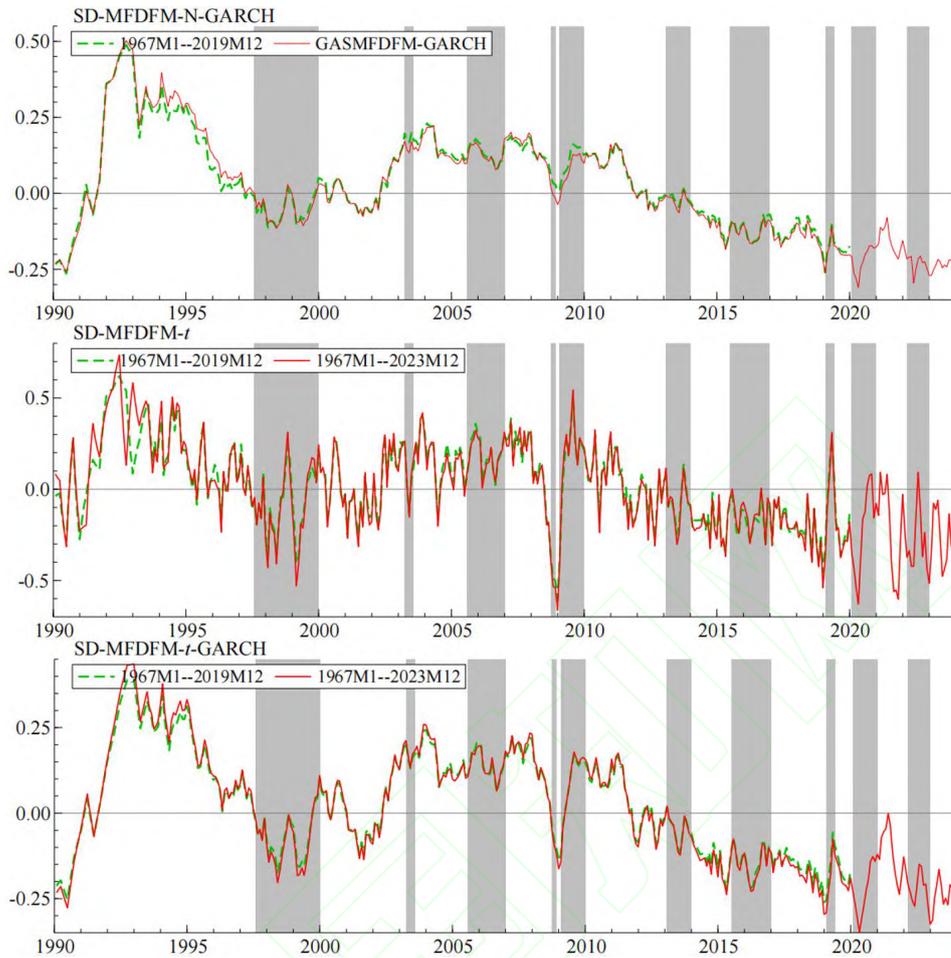


图 6 基于 GARCH 延拓模型提取得到的共同因子

经济景气指数发生的变化, 但是 SD-MFDFM- $t$  模型估计得到的共同因子其波动更为明显, 而 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型估计得到的结果显得更为平滑. 可见, 在中国场景下, 同时引入厚尾分布和 GARCH 模型存在其重要性和必要性.

最后, 比较 COVID-19 前后宏观经济景气指数的变化可以发现, 根据前述下行信号的判别方法, COVID-19 的冲击使得中国经济出现了短暂的下行信号, 体现在指数出现了显著而并不持久的下行. 但是随后就被快速的政策调控所防范化解. 长期来看, 中国经济景气指数仍然呈现出下降的趋势, 因此现阶段仍需警惕经济增速放缓带来的潜在下行风险.

上述结果表明, 虽然 COVID-19 的冲击可以在一定程度上被 GARCH 效应所吸收, 但其仍然难以对经济情况的恢复做出及时的反映. 此外, 鉴于 SD-MFDFM- $t$  和 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型估计得到的共同因子存在显著差异, 而 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型具有更好的拟合效果, 与 SD-MFDFM- $t$  模型估计得到的因子相比更为平滑, 因此在中国场景下, 使用 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型进行宏观经济景气指数的测度可作为最优的选择.

进一步地, 本文将基于 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型的经济景气指数测度结果与现有方法的测度结果相比较, 以考察测度结果的合理性. 图 7 展示了三种不同方法测度得到的中国经济景气一致指数的结果. 其中 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 模型为正文提到的在得分驱动框架下最适用于中国经济景气一致指数测度的模型, ZW2013 为依照郑挺国和王霞 (2013) 提出的方法测度得到的一致指数, CECI 则为国家统计局发布的经济景气指数. 比较三种方法测度得到的指数结果不难看出, 三个指数的走势在 2015 年之前较为相近, 但在 2015 年之后, CECI 的走势与 ZW2013 和 SD-MFDFM- $t$ -GARCH 的走势出现较大幅度的差异. 特别地, 在疫情前后, CECI 和 ZW2013 都因为宏观指标的剧烈波动产生了大幅的下降和回弹, 对于 CECI 而言, 该回弹甚至直接使得经济景气情况达到了 1990 年以来的峰值, 这与当下整体经济增长放缓的国内环境而言不相吻合. 与之相比, 本文测度得到的一致指数, 其结果更具合理性和可解释性.

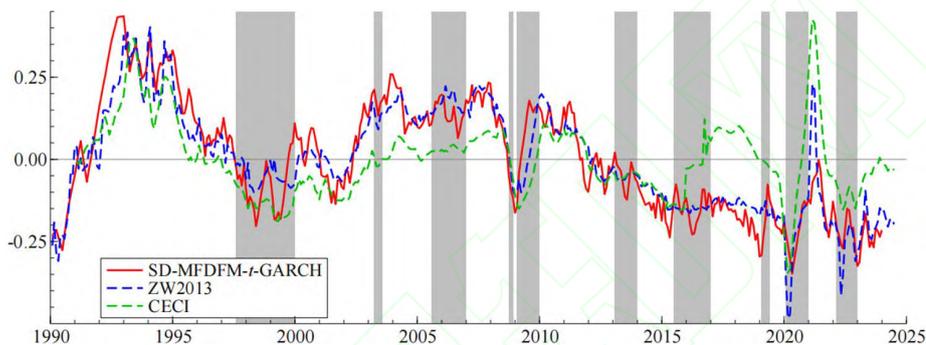


图 7 不同中国经济景气一致指数测算结果的比较

## 6 结论及启示

当今世界处于百年未有之变局, 极易出现重大内、外部冲击, 致使经济系统存在较高的不确定性. 体现在宏观经济指标上, 则为频繁出现的异常波动, 出现尖峰厚尾的特征. 这些异常波动可能是宏观经济系统的“尾部风险”, 亦可能传递出宏观经济下行的信号. 然而, 现有的基于混频动态因子模型的相关研究往往假设宏观经济变量服从正态分布. 上述假设难以考察宏观经济变量出现的愈加严重的厚尾现象, 从而可能过分吸收来自尾部风险的事件冲击, 使得宏观经济景气指数测度出现过于平滑或者过于极端的两种现象, 亦使得模型出现明显的参数不稳定性, 进而影响到有关部门对于宏观经济形势的研判, 产生不可靠的结论和政策建议.

本文将新型得分驱动方法与现有的混频动态因子模型框架相结合, 提出了一种全新的得分驱动混频动态因子模型 (SD-MFDFM) 簇. 该模型通过在建模中纳入学生  $t$  分布, 从而能够充分地考虑宏观经济指标中可能存在的厚尾现象. 不仅如此, 所提出的模型其对数似然存在闭式解, 因此相比传统参数驱动模型需要使用计算复杂度极高的 MCMC 方法, 可以直接使用极大似然法估计得到 SD-MFDFM 模型簇中的模型参数, 从而极大程度减少了计算量, 这尤其适应于当今的大数据时代. 数值模拟充分验证了本文所提出模型估计的准确性以及考虑厚尾分布的重要性, 基于美国和中国数据的研究结果表明, 考虑厚尾分布以及 GARCH 效

应均能够有效地提高宏观经济景气指数的测度效果以及模型估计的稳健性。相比美国而言, COVID-19 的冲击使得中国宏观经济产生了短暂的下行信号, 但随后就被相关的政策调控所防范化解。

基于上述的研究结果, 本文提出如下启示: 第一, 重大事件冲击下, 宏观经济变量具有高波动以及厚尾特征, 因此在宏观经济建模中, 应该重视上述厚尾部以及波动性特征对于模型估计以及模型结果产生的潜在影响; 第二, 鉴于考虑数据中的厚尾分布以及条件波动率中可能存在的厚尾效应对于宏观经济景气指数测度, 尤其是中国宏观经济指数测度的稳定性以及可解释性均具有长足的帮助。因此, 在构建相关混频动态因子模型时, 有必要将厚尾因素和条件异方差同时纳入考量; 第三, 虽然新冠疫情对于宏观经济带来的下行信号已经被迅速的政策调控所扭转, 但是长期来看, 中国经济正处于百年大变局的重要时刻, 经济局势瞬息万变, 经济系统极易发生结构性变化。在此背景下, 基于混频建模方法测度得到的中国经济景气一致指数能够实时地跟踪我国宏观经济的运行状况。当有关部门监测到经济出现下行信号, 尤其是强烈的下行信号时, 能够及时地使用货币与财政政策工具, 用以防范潜在的系统性风险。因此, 有关部门需要建立宏观经济景气状况的实时监测体系, 重视重大事件冲击对经济运行情况产生的影响, 并且防范经济增速放缓带来的潜在宏观经济风险。

## 参 考 文 献

- 陈磊, 孟勇刚, 王艺枫, (2018). 双重视角下的中国经济周期混频测度 [J]. 统计研究, 35(9): 29-39.
- Chen L, Meng Y G, Wang Y C, (2018). Measurement of China's Business Cycle with Mixed-frequency Data Based on Dual Perspectives[J]. Statistical Research, 35(9): 29-39.
- 陈磊, 孟勇刚, 咸金坤, (2019). 我国宏观经济景气的实时监测与预测 [J]. 数量经济技术经济研究, 36(2): 86-102.
- Chen L, Meng Y G, Xian J K, (2019). Real-time Monitoring and Forecasting of China's Macroeconomic Conditions[J]. The Journal of Quantitative & Technical Economics, 36(2): 86-102.
- 费兆奇, 刘康, (2019). 中国宏观经济波动的高频监测研究——基于混频模型对日度经济先行指数的构建和分析 [J]. 管理世界, 35(6): 27-38.
- Fei Z Q, Liu K, (2019). High-frequency Monitoring of China's Macroeconomic Fluctuations: Construction and Analysis of a Daily Leading Economic Index Based on Mixed-Frequency Models[J]. Management World, 35(6): 27-38.
- 栾惠德, 侯晓霞, (2015). 中国实时金融状况指数的构建 [J]. 数量经济技术经济研究, 32(4): 137-148.
- Luan H D, Hou X X, (2015). Construction of China's Real-time Financial Conditions Index[J]. The Journal of Quantitative & Technical Economics, 32(4): 137-148.
- 尚玉皇, 郑挺国, (2018). 中国金融形势指数混频测度及其预警行为研究 [J]. 金融研究, (3): 21-35.
- Shang Y H, Zheng T G, (2018). The Mixed Frequency Measuring of Chinese FCI and Its Risk Warning Behavior[J]. Journal of Financial Research, (3): 21-35.
- 尚玉皇, 郑挺国, (2023). 中国宏观经济与利率期限结构: 混频作用机制及跨逆周期调控效应 [J]. 财贸经济, 44(11): 88-105.
- Shang Y H, Zheng T G, (2023). China's Macroeconomy and Term Structure of Interest Rates: The Mechanism of Mixed Frequency and the Effect of Cross-Cyclical and Countercyclical Regulation[J]. Finance & Trade Economics, 44(11): 88-105.

- 隋建利, 吕文强, (2024). 从“脆弱性”到“韧性”: 中国经济在险增长的脆弱性溯源与韧性解构 [J]. 中国工业经济, (4): 17–36.
- Sui J L, Lv W Q, (2024). From “Vulnerability” to “Resilience”: Tracing the Vulnerability and Resilience Deconstruction of China’s Economic Growth at Risk[J]. China Industrial Economics, (4): 17–36.
- 王霞, 郑挺国, (2020). 基于实时信息流的中国宏观经济不确定性测度 [J]. 经济研究, 55(10): 55–71.
- Wang X, Zheng T G, (2020). Measuring China’s Macroeconomic Uncertainty Using Real Time Data Information[J]. Economic Research, 55(10): 55–71.
- 郑挺国, 王霞, (2013). 中国经济周期的混频数据测度及实时分析 [J]. 经济研究, 48(6): 58–70.
- Zheng T G, Wang X, (2013). Measuring China’s Business Cycle with Mixed-frequency Data and Its Real Time Analysis[J]. Economic Research Journal, 48(6): 58–70.
- 郑挺国, 曹伟伟, 王霞, (2023). 基于混频数据的日度经济不确定性测度及其应用 [J]. 统计研究, 40(1): 33–48.
- Zheng T G, Cao W W, Wang X, (2023). Daily Measurement of Economic Uncertainty Based on Mixed Frequency Data and Its Applications[J]. Statistical Research, 40(1): 33–48.
- 郑挺国, 叶仕奇, 范馨月, (2023). 大数据下经济在险增长测度与风险探源研究 [J]. 经济研究, 58(11): 133–152.
- Zheng T G, Ye S Q, Fan X Y, (2023). Risk Measurement and Risk Source Identification of Economic Growth under Data-rich Environment[J]. Economic Research Journal, 58(11): 133–152.
- 郑挺国, 巩璐, 叶仕奇, (2024). 时变视阈下在险通货膨胀的跨国溢出研究 [J]. 世界经济, 47(12): 35–70.
- Zheng T G, Gong L, Ye S Q, (2024). A Study of the Cross-national Spillover of Inflation-at-Risk from a Time-varying Perspective[J]. The Journal of World Economy, 47(12): 35–70.
- 周德才, 李晓璇, 李佩琳, (2020). 基于灵活损失函数的中国最优灵活时变货币政策规则混频研究 [J]. 系统工程理论与实践, 40(11): 2747–2768.
- Zhou D C, Li X X, Li P L, (2020). Mixed-frequency Research on China’s Optimal Flexible and Time-varying Monetary Policy Rules Based on Flexible Loss Function[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 40(11): 2747–2768.
- Adrian T, Boyarchenko N, Giannone D, (2019). Vulnerable Growth[J]. American Economic Review, 109(4): 1263–1289.
- Almuzara M, Baker K, O’Keeffe H, et al. (2023). The New York Fed Staff Nowcast 2.0[R]. New York: Federal Reserve Bank of New York.
- Andres P, (2014). Computation of Maximum Likelihood Estimates for Score Driven Models for Positive Valued Observations[J]. Computational Statistics and Data Analysis, 76: 34–43.
- Aruoba S B, Diebold F X, Scotti C, (2009). Real-time Measurement of Business Conditions[J]. Journal of Business & Economic Statistics, 27(4): 417–427.
- Banbura M, Giannone D, Reichlin L, (2010). Nowcasting[R]. Frankfurt am Main: European Central Bank.
- Blasques F, Koopman S J, Lucas A, et al. (2016). Spillover Dynamics for Systemic Risk Measurement Using Spatial Financial Time Series Models[J]. Journal of Econometrics, 195(2): 211–223.
- Blasques F, van Brummelen J, Koopman S J, et al. (2022). Maximum Likelihood Estimation for Score-Driven Models[J]. Journal of Econometrics, 227(2): 325–346.
- Camacho M, Perez-Quiros G, (2010). Introducing the Euro-sting: Short-Term Indicator of Euro Area Growth[J]. Journal of Applied Econometrics, 25(4): 663–694.

- Catania L, (2021). Dynamic Adaptive Mixture Models with an Application to Volatility and Risk[J]. *Journal of Financial Econometrics*, 19(4): 531–564.
- Chib S, Ramamurthy S, (2014). DSGE Models with Student-t Errors[J]. *Econometric Reviews*, 33(1–4): 152–171.
- Chiu C W J, Mumtaz H, Pinter G, (2017). Forecasting with VAR Models: Fat Tails and Stochastic Volatility[J]. *International Journal of Forecasting*, 33(4): 1124–1143.
- Clark T E, Ravazzolo F, (2015). Macroeconomic Forecasting Performance Under Alternative Specifications of Time-Varying Volatility[J]. *Journal of Applied Econometrics*, 30(4): 551–575.
- Creal D, Koopman S J, Lucas A, (2013). Generalized Autoregressive Score Models with Applications[J]. *Journal of Applied Econometrics*, 28(5): 777–795.
- Cross J, Poon A, (2016). Forecasting Structural Change and Fat-tailed Events in Australian Macroeconomic Variables[J]. *Economic Modelling*, 58: 34–51.
- Cúrdia V, Del Negro M, Greenwald D L, (2014). Rare Shocks, Great Recessions[J]. *Journal of Applied Econometrics*, 29(7): 1031–1052.
- Gorgi P, Koopman S J, Schaumburg J, (2021). Vector Autoregressions with Dynamic Factor Coefficients and Conditionally Heteroskedastic Errors[R]. Amsterdam: Tinbergen Institute.
- Granger C W J, (1988). Some Recent Development in a Concept of Causality[J]. *Journal of Econometrics*, 39(1–2): 199–211.
- Hamilton J D, (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle[J]. *Econometrica*, 57(2): 357–384.
- Harvey A C, (2013). *Dynamic Models for Volatility and Heavy Tails: With Applications to Financial and Economic Time Series*[M]. Cambridge: Cambridge University Press.
- Karlsson S, Mazur S, Nguyen H, (2023). Vector Autoregression Models with Skewness and Heavy Tails[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 146: 104580.
- Kim C J, Nelson C R, (1998). Business Cycle Turning Points, a New Coincident Index, and Tests of Duration Dependence Based on a Dynamic Factor Model with Regime Switching[J]. *Review of Economics and Statistics*, 80(2): 188–201.
- Mariano R S, Murasawa Y, (2003). A New Coincident Index of Business Cycles Based on Monthly and Quarterly Series[J]. *Journal of Applied Econometrics*, 18(4): 427–443.
- Mishkin F S, (2011). Over the Cliff: From the Subprime to the Global Financial Crisis[J]. *Journal of Economic Perspectives*, 25(1): 49–70.
- Scotti C, (2016). Surprise and Uncertainty Indexes: Real-time Aggregation of Real-Activity Macrosurprises[J]. *Journal of Monetary Economics*, 82: 1–19.
- Stock J H, Watson M W, (1989). New Indexes of Coincident and Leading Economic Indicators[J]. *NBER Macroeconomics Annual*, 4: 351–394.
- Stock J H, Watson M W, (1991). A Probability Model of the Coincident Economic Indicators[C]// Lahiri K, Moore G H (eds). *Leading Economic Indicators: New Approaches and Forecasting Records*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Stock J H, Watson M W, (2016). Dynamic Factor Models, Factor-Augmented Vector Autoregressions, and Structural Vector Autoregressions in Macroeconomics[C]// Taylor J B, Uhlig H (eds). *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 2. Amsterdam: Elsevier: 415–525.
- Weiss L M, (1984). Comparative Histologic Study of 43 Metastasizing and Nonmetastasizing Adrenocortical Tumors[J]. *The American Journal of Surgical Pathology*, 8(3): 163–170.

## 附录

## A 聚合及季节移动平均过程

假设一个移动平均过程  $u_t^k = \sum_{j=0}^{2k-1} w_j v_{t-j}$ , 其中  $v_t$  是一个白噪声,  $w_i, i = 0, \dots, 2k-1$  为滞后项的权重. 参照 Weiss (1984) 和 Granger (1988), 序列  $u_{t-ik}^k, i = 0, 1, \dots$  存在一个等价的 MA(1) 表达式  $u_t^k = e_t + \theta e_{t-k}$ .

其中, 参数  $\theta$  可以按照以下方式解出. 首先,  $u_t^k$  的方差为  $\text{Var}(u_t^k) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{2k-1} w_i^2$ ,  $u_t^k$  和  $u_{t-k}^k$  的协方差为  $\text{Cov}(u_t^k, u_{t-k}^k) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{k-1} w_{k+i} w_i$ . 对于  $l > 1$ ,  $u_t^k$  和  $u_{t-lk}^k$  的协方差为零. 因此, 序列  $u_t^k, u_{t-k}^k, u_{t-2k}^k, \dots$  的自相关函数 (autocorrelation function, ACF) 为:

$$\rho_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } i = 0; \\ \frac{\sum_{i=0}^{k-1} w_{k+i} w_i}{\sum_{i=0}^{2k-1} w_i^2}, & \text{如果 } i = 1; \\ 0, & \text{如果 } i = 2, 3, \dots \end{cases}$$

现在考虑以下季节移动平均过程

$$u_t^k = e_t + \theta e_{t-k},$$

其 ACF 为:

$$\rho_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } i = 0; \\ \frac{\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}}, & \text{如果 } i = 1; \\ 0, & \text{如果 } i = 2, 3, \dots \end{cases}$$

因此, 如果令 ACF

$$\rho_k = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} w_{k+i} w_i}{\sum_{i=0}^{2k-1} w_i^2} = \frac{\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}}.$$

聚合的 MA 过程和季节性 MA(1) 过程是等价的. 基于前述等式, 可以得到  $\theta$  的解析式为

$$\theta = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} w_{k+i} w_i}{\sqrt{(\sum_{i=0}^{2k-1} w_i^2)^2 - (\sum_{i=0}^{k-1} w_{k+i} w_i)^2}}.$$

现在考虑本节的特殊情况, 即  $w_i = (i+1)/k$  对于  $i = 0, \dots, k-1$  和  $w_i = (2k-i-1)/k$  对于  $i = k, \dots, 2k-1$ , 此时有  $\sum_{i=0}^{k-1} w_{k+i} w_i = (k^2 - 1)/6k$  和  $\sum_{i=0}^{2k-1} w_i^2 = (2k^2 + 1)/3k$ . 因此,  $\rho_k = (k^2 - 1)/(4k^2 + 2)$  且  $\theta = (k^2 - 1)/\sqrt{15k^4 + 18k^2 + 3}$ , 这意味着当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\rho_k \rightarrow 1/4$ , 且  $\theta \rightarrow 1/\sqrt{15}$ .

## B 命题 1 的证明

给定式 (13) 中的条件对数似然  $l_t$ , 有:

$$\nabla_t = \frac{\partial l_t}{\partial f_t} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial l_{i,t}}{\partial f_t}, \quad (\text{B1})$$

其中  $l_{i,t} = -\frac{1}{2} \cdot \delta_t^i [\log 2\pi + \log \sigma_i^2 + \varepsilon_{i,t}^2 \sigma_i^{-2}]$ . 此外, 有:

$$\frac{\partial l_{i,t}}{\partial f_t} = \frac{\partial l_{i,t}}{\partial \varepsilon_{i,t}} \frac{\partial \varepsilon_{i,t}}{\partial f_t}, \quad (\text{B2})$$

易得:

$$\frac{\partial l_{i,t}}{\partial \varepsilon_{i,t}} = -\delta_t^i \varepsilon_{i,t} \sigma_i^{-2}. \quad (\text{B3})$$

根据  $C_t^F$  和  $C_t^S$  的定义, 有:

$$\frac{\partial \varepsilon_{i,t}}{\partial f_t} = \begin{cases} -\beta_i, & \text{当 } 1 \leq i \leq n_M; \\ -\frac{1}{3}\beta_i, & \text{当 } n_M + 1 \leq i \leq n_M + n_{FQ}; \\ -\beta_i, & \text{当 } n_M + n_{FQ} + 1 \leq i \leq . \end{cases} \quad (\text{B4})$$

结合式 (B1)~(B4) 可以直接推导出  $\nabla_t$ .

对于  $I_t$ , 注意到  $I_t = E[-\partial \nabla_t / \partial f_t]$ . 利用式 (B4) 可以直接得到结果.

## C 命题 2 的证明

基于式 (14) 中的条件对数似然, 忽略一些无关的常数, 可以得到:

$$\nabla_t = \sum_{i=1}^N \frac{\partial l_{i,t}}{\partial f_t} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial l_{i,t}}{\partial \varepsilon_{i,t}} \frac{\partial \varepsilon_{i,t}}{\partial f_t}, \quad l_{i,t} = -\frac{\nu_i + 1}{2} \delta_t^i \log \left( 1 + \frac{\varepsilon_{i,t}^2}{(\nu_i - 2)\sigma_i^2} \right).$$

经简单计算, 可以得到:

$$\frac{\partial l_{i,t}}{\partial \varepsilon_{i,t}} = -\delta_t^i w_{i,t} \varepsilon_{i,t} \sigma_i^{-2}, \quad (\text{C5})$$

其中  $w_{i,t} = (\nu_i + 1) / [(\nu_i - 2) + \varepsilon_{i,t}^2 \sigma_i^{-2}]$ . 通过结合式 (B4) 和式 (C5) 的结果, 可以直接得到  $\nabla_t$ .

对于  $I_t$ , 注意到  $I_t = E[\nabla_t \nabla_t']$ , 有:

$$\begin{aligned} I_t &= E \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_t^i w_{i,t} \varepsilon_{i,t} \sigma_i^{-2} \delta_t^j w_{j,t} \varepsilon_{j,t} \sigma_j^{-2} \frac{\partial \varepsilon_{i,t}}{\partial f_t} \frac{\partial \varepsilon_{j,t}}{\partial f_t} \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_t^i \delta_t^j \frac{\partial \varepsilon_{i,t}}{\partial f_t} \frac{\partial \varepsilon_{j,t}}{\partial f_t} \sigma_i^{-2} \sigma_j^{-2} E[w_{i,t} \varepsilon_{i,t} w_{j,t} \varepsilon_{j,t}]. \end{aligned}$$

因为当  $i \neq j$  时,  $\varepsilon_{i,t}$  和  $\varepsilon_{j,t}$  是不相关的, 并且  $w_{i,t}\varepsilon_{i,t}$  是奇函数, 有:

$$E[w_{i,t}\varepsilon_{i,t}w_{j,t}\varepsilon_{j,t}] = E[w_{i,t}\varepsilon_{i,t}] \cdot E[w_{j,t}\varepsilon_{j,t}] = 0,$$

从而得到:

$$I_t = \sum_{i=1}^N \delta_t^i \left( \frac{\partial \varepsilon_{i,t}}{\partial f_t} \right)^2 \sigma_i^{-2} E[w_{i,t}^2 \tilde{\varepsilon}_{i,t}^2], \quad (\text{C6})$$

其中  $\tilde{\varepsilon}_{i,t}^2 = (\varepsilon_{i,t}/\sigma_{i,t})^2$  遵循  $t_{\nu_i}(0, 1)$  分布.

对于  $E[w_{i,t}^2 \tilde{\varepsilon}_{i,t}^2]$ , 此时有:

$$\begin{aligned} E[w_{i,t}^2 \tilde{\varepsilon}_{i,t}^2] &= \frac{(\nu_i + 1)^2}{(\nu_i - 2)^2} E \left[ \frac{\tilde{\varepsilon}_{i,t}^2}{(1 + \tilde{\varepsilon}_{i,t}^2/(\nu_i - 2))^2} \right] \\ &= \frac{(\nu_i + 1)^2}{(\nu_i - 2)^2} \int \frac{\Gamma(\frac{\nu_i+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_i}{2})\sqrt{\pi(\nu_i - 2)}} \tilde{\varepsilon}_{i,t}^2 \left( 1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_{i,t}^2}{\nu_i - 2} \right)^{-(\nu_i+4+1)/2} d\tilde{\varepsilon}_{i,t} \\ &= \frac{(\nu_i + 1)^2 \Gamma(\frac{\nu_i+1}{2}) \Gamma(\frac{\nu_i+4}{2}) (\nu_i + 4) (\nu_i - 2)}{(\nu_i - 2)^2 \Gamma(\frac{\nu_i}{2}) \Gamma(\frac{\nu_i+5}{2}) (\nu_i + 2) (\nu_i + 4)} \\ &= \frac{(\nu_i + 1)\nu_i}{(\nu_i - 2)(\nu_i + 3)}. \end{aligned}$$

结合上述结果, 可以计算求得  $I_t$  的形式.

## D 模拟研究结果

表 D1 SD-MDFM-N 模型的拟合结果 (DGP1)

参数	真实值	$T = 300$		$T = 600$		$T = 1500$	
		Normal	$t$	Normal	$t$	Normal	$t$
$\beta_1$	1.00	1.0536 (0.2493)	1.0523 (0.2523)	0.9945 (0.1444)	0.9954 (0.1489)	0.9913 (0.1085)	0.9906 (0.1086)
$\beta_2$	1.00	1.0327 (0.2281)	1.0136 (0.2434)	0.9970 (0.1618)	0.9917 (0.1809)	0.9909 (0.0985)	0.9843 (0.1031)
$\beta_3$	1.00	1.0042 (0.2096)	0.9993 (0.2100)	0.9796 (0.1503)	0.9795 (0.1529)	0.9883 (0.0994)	0.9878 (0.0999)
$\beta_4$	1.00	1.0425 (0.2504)	1.0391 (0.2514)	0.9975 (0.1575)	0.9972 (0.1616)	0.9902 (0.0961)	0.9888 (0.0959)
$\beta_5$	1.00	-	-	-	-	-	-
$\rho$	0.90	0.8957 (0.0363)	0.8956 (0.0363)	0.8988 (0.0227)	0.8993 (0.0230)	0.9000 (0.0157)	0.9003 (0.0158)
$\alpha$	0.05	0.0506 (0.0089)	0.0506 (0.0090)	0.0511 (0.0061)	0.0509 (0.0063)	0.0503 (0.0037)	0.0503 (0.0037)
$\phi_1$	0.30	0.2873 (0.0683)	0.2872 (0.0679)	0.2884 (0.0482)	0.2887 (0.0483)	0.2985 (0.0281)	0.2987 (0.0282)
$\phi_2$	0.30	0.2893 (0.0446)	0.2987 (0.0612)	0.2943 (0.0260)	0.2995 (0.0433)	0.2952 (0.0181)	0.2985 (0.0291)
$\phi_3$	0.30	0.2883 (0.0587)	0.2890 (0.0585)	0.2932 (0.0398)	0.2932 (0.0399)	0.2995 (0.0263)	0.2999 (0.0263)
$\phi_4$	0.30	0.2802 (0.0688)	0.2801 (0.0690)	0.2972 (0.0418)	0.2969 (0.0423)	0.2977 (0.0288)	0.2977 (0.0288)
$\phi_5$	0.30	0.2774 (0.0881)	0.2762 (0.0898)	0.2765 (0.0655)	0.2764 (0.0665)	0.2778 (0.0377)	0.2776 (0.0374)
$\sigma_1$	0.30	0.2997 (0.0122)	0.2998 (0.0122)	0.2993 (0.0078)	0.2992 (0.0079)	0.2996 (0.0055)	0.2996 (0.0055)
$\sigma_2$	0.30	0.2985 (0.0110)	0.2983 (0.0110)	0.3001 (0.0081)	0.3000 (0.0081)	0.2999 (0.0051)	0.2998 (0.0051)
$\sigma_3$	0.30	0.2980 (0.0122)	0.2981 (0.0122)	0.2988 (0.0087)	0.2987 (0.0087)	0.2996 (0.0050)	0.2996 (0.0050)
$\sigma_4$	0.30	0.2983 (0.0106)	0.2984 (0.0106)	0.2991 (0.0079)	0.2991 (0.0080)	0.2993 (0.0055)	0.2993 (0.0055)
$\sigma_5$	0.30	0.2950 (0.0214)	0.2954 (0.0219)	0.2999 (0.0143)	0.3000 (0.0145)	0.3010 (0.0105)	0.3010 (0.0106)
$v_1$	-	166.63 (127.31)	-	200.73 (121.67)	-	222.28 (100.01)	-
$v_2$	-	189.92 (127.37)	-	193.82 (115.59)	-	231.54 (106.85)	-
$v_3$	-	165.77 (123.55)	-	214.53 (116.30)	-	212.37 (112.25)	-
$v_4$	-	186.04 (130.40)	-	186.54 (117.53)	-	204.18 (112.75)	-
$v_5$	-	111.39 (89.795)	-	102.20 (81.199)	-	110.48 (73.279)	-
RMSE	-	0.1728	0.1813	0.1850	0.1979	0.1960	0.2067

表 D2 SD-MFDFM-t 模型的拟合结果 (DGP2)

参数	真实值	$T = 300$		$T = 600$		$T = 1500$	
		Normal	$t$	Normal	$t$	Normal	$t$
$\beta_1$	1.00	0.9881 (0.2486)	0.9810 (0.1723)	1.0042 (0.1599)	0.9948 (0.1263)	0.9858 (0.0959)	0.9920 (0.0729)
$\beta_2$	1.00	1.0019 (0.1912)	0.9896 (0.1663)	0.9970 (0.1450)	0.9963 (0.1206)	0.9874 (0.0841)	0.9947 (0.0694)
$\beta_3$	1.00	0.9865 (0.2353)	0.9827 (0.1682)	0.9818 (0.1633)	0.9899 (0.1276)	0.9867 (0.0874)	0.9982 (0.0678)
$\beta_4$	1.00	0.9754 (0.2156)	0.9657 (0.1644)	0.9812 (0.1648)	0.9923 (0.1248)	0.9713 (0.0834)	0.9898 (0.0695)
$\beta_5$	1.00	1.000 (0.0361)	1.000 (0.0331)	1.000 (0.0249)	1.000 (0.0222)	1.000 (0.0146)	1.000 (0.0129)
$\rho$	0.90	0.8870 (0.0361)	0.8919 (0.0331)	0.8942 (0.0249)	0.8988 (0.0222)	0.8971 (0.0146)	0.9013 (0.0129)
$\alpha$	0.05	0.0585 (0.0102)	0.0506 (0.0072)	0.0575 (0.0061)	0.0500 (0.0048)	0.0576 (0.0044)	0.0499 (0.0029)
$\phi_1$	0.30	0.2917 (0.0659)	0.2963 (0.0530)	0.2931 (0.0477)	0.3000 (0.0379)	0.2967 (0.0279)	0.2998 (0.0230)
$\phi_2$	0.30	0.2835 (0.0467)	0.2915 (0.0523)	0.2896 (0.0279)	0.2956 (0.0310)	0.2946 (0.0167)	0.2984 (0.0176)
$\phi_3$	0.30	0.3001 (0.0601)	0.2998 (0.0498)	0.3013 (0.0467)	0.3016 (0.0361)	0.2977 (0.0245)	0.2989 (0.0209)
$\phi_4$	0.30	0.2899 (0.0609)	0.2948 (0.0479)	0.2952 (0.0462)	0.2962 (0.0369)	0.2981 (0.0261)	0.2988 (0.0211)
$\phi_5$	0.30	0.2699 (0.0890)	0.2747 (0.0748)	0.2825 (0.0609)	0.2819 (0.0530)	0.2827 (0.0385)	0.2833 (0.0302)
$\sigma_1$	0.30	0.3021 (0.0317)	0.3064 (0.0375)	0.3002 (0.0227)	0.3008 (0.0212)	0.3014 (0.0156)	0.3002 (0.0128)
$\sigma_2$	0.30	0.2975 (0.0296)	0.3002 (0.0286)	0.3020 (0.0357)	0.3004 (0.0195)	0.3038 (0.0207)	0.3012 (0.0130)
$\sigma_3$	0.30	0.2987 (0.0257)	0.3039 (0.0303)	0.3017 (0.0321)	0.3009 (0.0211)	0.3019 (0.0180)	0.3005 (0.0123)
$\sigma_4$	0.30	0.3007 (0.0306)	0.3030 (0.0280)	0.3040 (0.0266)	0.3038 (0.0207)	0.3037 (0.0157)	0.3010 (0.0112)
$\sigma_5$	0.30	0.2988 (0.0393)	0.3312 (0.2028)	0.3078 (0.0410)	0.3066 (0.0488)	0.3130 (0.0286)	0.3048 (0.0214)
$v_1$	4.00	4.4995 (2.7472)	-	4.2287 (0.9657)	-	4.0856 (0.4353)	-
$v_2$	4.00	4.4128 (1.2060)	-	4.1353 (0.6751)	-	4.0210 (0.4155)	-
$v_3$	4.00	4.4280 (1.5879)	-	4.1469 (0.7892)	-	4.0286 (0.3919)	-
$v_4$	4.00	4.2435 (1.2409)	-	4.0610 (0.6866)	-	4.0473 (0.4051)	-
$v_5$	4.00	8.2305 (11.486)	-	5.2608 (5.0487)	-	4.2379 (0.8837)	-
RMSE	-	0.5960	0.1477	1.0765	0.1772	2.4742	0.1859

E 额外的数据描述图

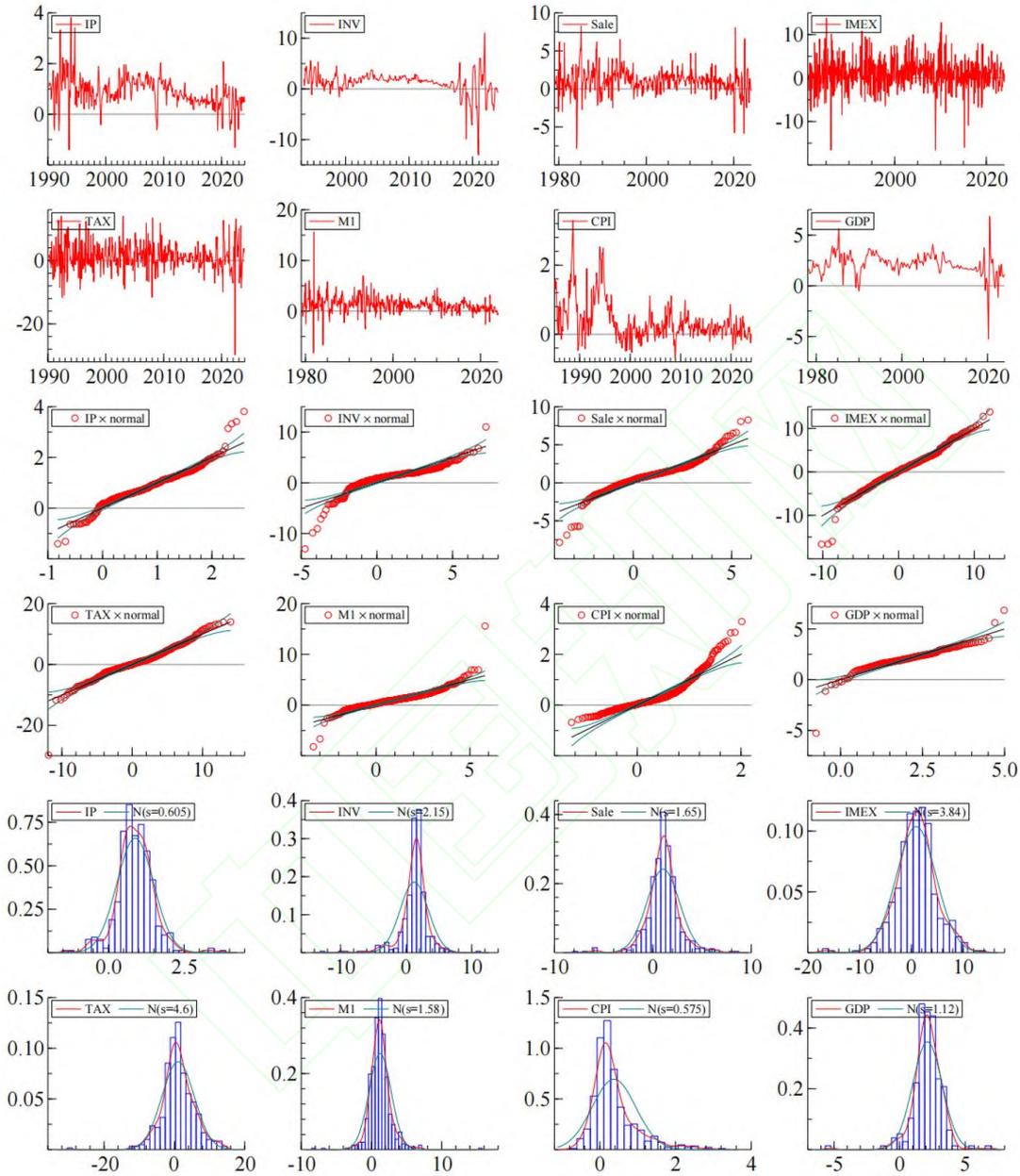


图 E1 各宏观指标的增长率时序图和 QQ 图